

# Квантовая теория И КОСМОЛОГИЯ

Сборник статей, посвященный 70-летию  
профессора А. А. Гриба

Под редакцией  
В. Ю. Дорофеева и Ю. В. Павлова

Лаборатория им. А. А. Фридмана

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2009

**ББК 22.31**

**УДК 524.8**

**Квантовая теория и космология.** Сборник статей, посвященный 70-летию профессора А.А. Гриба. Под редакцией В.Ю. Дорофеева и Ю.В. Павлова. – СПб., 2009. – 222 с.

Сборник посвящен 70-летию профессора, академика РАН Андрея Анатольевича Гриба и содержит статьи по теории гравитации, космологии, квантовой теории и математической физике.

Сборник представляет интерес для специалистов по теоретической физике и математиков, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

© Коллектив авторов, 2009

**ISBN 978-5-94041-007-2**

## Предисловие редакторов

Настоящий сборник публикуется в связи с 70-летием профессора, доктора физико-математических наук, академика РАН Андрея Анатольевича Гриба — одного из ярких представителей старшего поколения российских физиков. Фундаментальные результаты А. А. Гриба в области квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, космологии, квантовой логики и др. хорошо известны у нас в стране и за рубежом. Его труды уже стали настольной книгой теоретиков, работающих в этих областях физики.

Круг интересов А. А. Гриба удивительно широк и многообразен. Мы сочли возможным включить в сборник интервью, которое взял у А. А. Гриба в связи с его 70-летием один из редакторов (Ю. В. Павлов), предоставив читателям возможность проследить творческий и педагогический путь А. А. Гриба, узнать о зарождении и развитии его идей, познакомиться с его впечатлениями о науке в других странах, со взглядами на будущее физической науки. В сборнике приведен также список монографий и учебников написанных А. А. Грибом.

Наш сборник — это скромный знак внимания и признательности коллег и учеников, в честь 70-летия профессора, академика РАН А. А. Гриба. Редакторы сборника выражают глубокую благодарность всем ученым, приславшим свои содержательные статьи и выражают уверенность в том, что их публикация будет способствовать поддержанию высокого уровня российской науки.

Редакторы В. Ю. Дорофеев и Ю. В. Павлов.

# Интервью с профессором, академиком РАН А. А. Грибом в связи с его 70-летием

*Ю. В. П.* Андрей Анатольевич, расскажите, пожалуйста, о начале вашего научного пути, о своих впечатлениях о той эпохе в теоретической физике.

*А. А. Г.* Надо сказать, что мне повезло застать время расцвета теоретической физики, время 60-х, 70-х годов двадцатого века. 20-й век несомненно был веком физики подобно тому как 16-й век был временем великих географических открытий. При этом в 60-е годы можно было общаться как с физиками, создававшими квантовую теорию и теорию относительности в 20-е и 30-е годы, так и со своими современниками, строившими физику элементарных частиц. Мне повезло слышать лекцию Дирака, читавшего ее нам, студентам Ленинградского университета, В. А. Фоку читал нам лекции по квантовой механике. Потом в аспирантуре я слушал лекции Швингера, приехавшего в Ленинград по приглашению Фока. К нам тогда приезжали и читали лекции: один из создателей теории сверхпроводимости Фрелих, Глаубер рассказывал о квантовой оптике, Л. Розенфельд о своих работах с Н. Бором по теории измерений в квантовой электродинамике, Дж. Уилер и К. Торн о проблемах гравитации.

Руководителем по диплому был профессор Ю. В. Новожилов. Сначала в качестве темы диплома у меня была модель появления ненулевой массы частицы по аналогии с ненулевой щелью в теории сверхпроводимости. Но потом тему пришлось сменить, так как Ю. В. Новожилов обратил мое внимание на только что появившийся тогда препринт работы Намбу и Иона-Ласинио о спонтанном нарушении симметрии в физике. За эту работу в 2008 году Намбу дали Нобелевскую премию. Я писал диплом по проблеме неаналитичности по константе связи функции Грина в некоторых задачах квантовой электродинамики. Однако, обратим внимание на то, каков же был тогда уровень кафедры теоретической физики ЛГУ, возглавляемой В. А. Фоком, если студенту предложили тему, за которую в будущем дали Нобелевскую премию? Тогда же в 60-х годах на фоковском семинаре я рассказывал тогда еще мало известную работу С. Вейнберга, которая потом послужила основой единой теории

электрослабых взаимодействий и принесла ему Нобелевскую премию.

В ЛГУ я работал ассистентом с 1963 до 1975 года. В 60-х и начале 70-х годов наша семья подверглась некоторым политическим преследованиям, что было связано с “разоблачительной” статьей в газете “Смена” под названием “Кривая дуализма Гриба” о моем брате — тогда студенте математико-механического факультета ЛГУ. В статье говорилось о том как плохо читать Н. Бердяева, так как идеализм ведет к поповщине... Все это было следствием того, что мой брат, будучи в гостях у одной женщины, известного врача-гомеопата, в присутствии иностранки из Швейцарии сказал о своем интересе к философии Бердяева. Затем его, 20-летнего студента разбирали на всяких комсомольских собраниях с целью выгнать из университета, что, впрочем, не получилось, не в последнюю очередь из-за заслуг нашего отца, профессора математико-механического факультета, участника советского ядерного проекта и визита к ректору академика В. И. Смирнова. Конечно, времена были уже не сталинские, все происходило менее грубо и вообще “втихую”. Моего отца лишили должности заведующего кафедрой, мне же устроили такое расписание с ежедневными поездками в Петергоф, что так или иначе нужно было уходить... Особенно же чувствительна оказалась ситуация, когда активное недоброжелательство вплоть до срыва защиты диссертации перешло на моих учеников, талантливых теоретиков С. Г. Мамаева и В. М. Мостепаненко. Всю эту, кажущуюся дикой сегодня, историю я рассказываю, чтобы современная молодежь не очень то восхищалась советским временем брежневской эпохи. Это было время расцвета физики в нашей стране, но даже крупные ученые не могли быть граждански свободными. Вспомним, что А. Д. Сахаров был один... Именно это отсутствие гражданственности у ученых, занимавших административные посты и потому обычно являвшихся членами партии (кстати, в нашей семье никто никогда не был членом партии) и привело впоследствии в 90-е годы, когда партноменклатура начала крушить отечественную науку, начав “криминальную революцию”, к развалу отечественной науки. Эти люди не смогли организовать сопротивление власти. Из университета я перешел доцентом на кафедру теоретической физики ЛИТМО, Я уже не ездил на университетские семинары, проходившие в Петергофе и значительно ослабившие свой уровень. Однако получилось так, что я часто стал ездить в Москву и познакомился с деятельностью совсем другой школы, стиль которой отличался от фоковской школы. Достоинством фоковской школы являлось требование тщательной математической разработки и ясности.

В Москве же я узнал, что большие физические открытия обычно делаются интуитивно, на “пальцах”. Я посещал семинары Я. Б. Зельдовича, Д. Д. Иваненко, общегородской семинар В. Л. Гинзбурга в ФИАНе. Очень представительными были семинары М. А. Маркова по квантовой гравитации, в которых участвовали С. Хокинг, Дон Пэйдж, Р. Уолд и другие. С 1982 года я стал заведовать кафедрой высшей математики в Ленинградском финансово-экономическом институте. Пригласил меня туда ректор и во многом создатель этого института Ю. А. Лавриков. Это была довольно интересная личность. Внешне похожий на президента США Ф. Д. Рузвельта этот человек, в прошлом член Ленинградского горкома, сразу дал мне понять, что все про меня знает, и про мое знакомство с И. Бродским и А. Д. Сахаровым и про мои взгляды, но что ему это неважно, я устраиваю его как зав. кафедрой, на которой до меня были крупные скандалы. Это тоже была одна из особенностей эпохи. В отличие от мелких, “подкоммунивающих” администраторов, ради подачки в виде зарубежной поездки и т.п. способные на низость по отношению к подчиненным, существовали партийные “князья”, способные на либерализм и великодушные. К сожалению, впоследствии я узнал, что когда Ю. А. Лавриков был членом горкома, он так и не ответил на письмо отца И. Бродского, умолявшего его вмешаться и прекратить травлю его талантливому сына.

В 90-е годы у меня появилась возможность часто ездить за границу, посетить университеты Принстона, Парижа, Лондона, Токио, Дели, Сан-Пауло и Буэнос-Айреса, побывать в Ватикане на конференции о рождении Вселенной. После этой конференции была встреча и короткая беседа каждого из участников с папой Иоанном-Павлом Вторым. Однако за границей я не увидел того интеллектуального напряжения, которое было у нас в СССР в 60-е и 70-е годы. Золотой век физики везде стал подходить к концу...

*Ю. В. П.* Расскажите о Ваших первых научных работах.

*А. А. Г.* Как ни странно, первая моя работа была чисто математической. Дело в том, что мой отец Гриб Анатолий Андреевич был профессором математико-механического факультета университета и со времен войны я и наша семья были связаны с этим факультетом. Я “по знакомству” посещал мат-мех, где слушал лекции таких ученых как Г. М. Фихтенгольц и Д. К. Фаддеев. Там же работал и проф. Л. В. Овсянников, предложивший метод определяющих уравнений для поиска неизвестной группы симметрии (группы Ли) дифференциальных уравнений. Я применил этот метод для нахождения калибровочной симметрии.

рии уравнения скалярного поля во внешнем векторном поле и эта работа была опубликована в журнале “Дифференциальные уравнения” в 1966 году.<sup>1</sup> Потом, однако, я более не занимался этой темой, увлекшись идеей спонтанного нарушения  $CP$ -симметрии в квантовой теории. В 1965 году я опубликовал в “Письмах в ЖЭТФ” работу,<sup>2</sup> явившуюся одной из первых работ в данной области. Эта работа тогда вызвала большой интерес и, оказавшись на Международной конференции по  $CP$ -симметрии в Москве в 1968 году, я с дрожью отвечал на вопросы таких великих физиков как Б. М. Понтекорво, будущий нобелевский лауреат К. Руббиа, В. Н. Грибов и др.

*Ю. В. П.* Что Вы считаете основными направлениями Вашей научной деятельности?

*А. А. Г.* Я бы мог назвать четыре таких направления.

1. Спонтанное нарушение  $CP$ -симметрии. После первой моей работы в этой области, о которой я говорил, я занимался этой проблемой со своим учеником В. М. Мостепаненко. Обсуждение этой проблемы имеется в моей книге<sup>3</sup> о неинвариантности вакуума и в статье,<sup>4</sup> написанной с Е. В. Дамаскинским и В. М. Максимовым. Как известно,  $CP$ -нарушение согласно идее Т. Д. Ли объясняется введением добавочного угла при нарушении калибровочной симметрии. Наша гипотеза использует аналогию с идеей Л. Д. Ландау, заметившего, что в теории ферромагнетизма учет нелинейности при взаимодействии с внешним магнитным полем ведет к тому, что домены выстраиваются под некоторым углом к внешнему полю. Этот угол вычисляется, если известна константа при нелинейном члене. Подобный угол возникает, если наряду со спонтанным нарушением симметрии вакуума имеется явное нарушение симметрии в лагранжиане, что аналогично внешнему магнитному полю в ферромагнетике. Несовпадение направлений вакуума и лагранжиана за счет нелинейности объясняет  $CP$ -нарушение. Думаю, что эта идея не потеряла интерес и сейчас и может быть рассмотрена в более общих современных моделях  $CP$ -нарушения. В 2008 году Кобаяши и Маскава получили Нобелевскую премию за введение этого угла чисто феноменологическим путем, не пытаясь объяснить его ненулевое значение какой-либо теорией.

<sup>1</sup>Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, N 5, с.688–694.

<sup>2</sup>Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, вып. 1, с.14–17.

<sup>3</sup>А. А. Гриб. *Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля*. М.: Атомиздат, 1978.

<sup>4</sup>УФН. 1970. Т. 102, вып. 4, с.587–620.

В 1967 году я заметил,<sup>5</sup> что существование различных вакуумов при спонтанном нарушении калибровочной симметрии ведет к появлению ненулевой космологической постоянной во Вселенной, что потом было использовано в моделях Д. А. Киржница и А. Д. Линде. Тогда же мной была высказана идея о существовании во Вселенной нескольких вакуумов и описания ее квантового состояния матрицей плотности или статистической смесью вакуумов, что, как я понял впоследствии, может вести к объяснению ненулевых темной энергии и темной материи.

2. Рождение частиц в ранней Вселенной. Вместе с моими учениками С. Г. Мамаевым и В. М. Мостепаненко, а также с В. М. Фроловым мы оказались первыми, кто мог получить конечные оценки для эффекта рождения частиц гравитацией в ранней Вселенной. Эти результаты вошли в книги,<sup>6</sup> написанные мной совместно с С. Г. Мамаевым и В. М. Мостепаненко и имеют большое значение для космологии. Эти работы были продолжены в сотрудничестве с А. В. Нестеруком, а в настоящее время имеется плодотворное сотрудничество с Ю. В. Павловым.

3. Основания квантовой теории, квантовая логика, недистрибутивные решетки. В своих работах я развиваю вариант копенгагенской интерпретации, основанный на работах фон Неймана о роли сознания наблюдателя. Эту роль я связываю с различием булевой логики наблюдателя и небулевой логики мира, что изложено в моей книге<sup>7</sup> с В. Родригесом. В работах с Р. Р. Запатриным мне удалось привести примеры из теории автоматов, а также в модели случайных топологий, когда в макроситуациях реализуются недистрибутивные решетки, аналогичные встречающимся в микромире. Сейчас в работах с Г. Н. Парфеновым и К. Старковым мы пытаемся построить примеры макроскопических квантовых игр, имеющие значение для биологии, экономики и т.п.

Кроме перечисленных направлений в разное время я занимался вместе со своими учениками И. К. Лицкевич, В. С. Старостиным, В. М. Фроловым, Н. Ш. Урусовой эффектами квантовой теории во внешнем электромагнитном поле, а также проблемой регистрации гравитационных волн.

*Ю. В. П.* Расскажите о Вашей педагогической деятельности.

<sup>5</sup>Вестник ЛГУ. 1967. N 22. Вып. 4, с.50–56.

<sup>6</sup>А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*. М.: Атомиздат, 1980; *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988; *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*. St. Petersburg: Friedmann Lab. Publ., 1994.

<sup>7</sup>А. А. Grib, W. A. Rodrigues Jr. *Nonlocality in quantum physics*. New York: Kluwer Academic-Plenum Publ., 1999.



*А. А. Г.* В Ленинградском университете с 1961 по 1975 год я в качестве ассистента вел занятия по электродинамике, квантовой механике и теории элементарных частиц. Читал лекции по всем этим курсам. В 1969 году защитил кандидатскую диссертацию. С 1975 по 1982 год работал доцентом кафедры теоретической физики Ленинградского института точной механики и оптики, сейчас к сожалению не существующей... Читал лекции по всем разделам теоретической физики и квантовой оптики. В 1982 году защитил докторскую диссертацию на тему рождения частиц в ранней Вселенной. Одним из оппонентов был академик Я. Б. Зельдович, а отзыв ведущей организации писал В. Н. Грибов. С 1982 по 2002 год заведовал кафедрой высшей математики Ленинградского института экономики и финансов. Читал лекции по различным разделам высшей математики и концепциям современного естествознания. С 2003 года работаю профессором кафедры теоретической физики и астрономии СПб Педагогического университета им. А. И. Герцена. Читаю лекции по квантовой механике, теории элементарных частиц и космологии.

*Ю. В. П.* Что Вы скажете о своих учениках?

*А. А. Г.* Мне повезло с учениками. Своим недостатком я считаю то, что из-за чрезмерной увлеченности общими идеями я придаю мало значения тщательности разработки этих идей. И здесь большую помощь мне оказывали и оказывают ученики: В. М. Мостепаненко, несомненно, является крупнейшим физиком-теоретиком, главным специалистом по эффекту Казимира в мире и сейчас активно работает в США и Бразилии. С. Г. Мамаев, если бы не безвременная смерть, тоже достиг бы таких же вершин. Оба они в свое время стали докторами физ.-мат. наук. Большой надежностью и тщательностью расчетов отличаются работы моих учениц И. К. Лицкевич и Н. Ш. Урусовой. Наконец, я должен сказать о работах лаборатории теоретической физики им. А. А. Фридмана и всех ее сотрудниках и участниках семинаров: В. Ю. Дорофеев, Р. Р. Запатрине, С. В. Красникове, А. А. Лобашеве, Ю. В. Павлове, Г. Н. Парфенове, Е. А. Поберии, Р. Х. Сайбаталове и А. А. Черницком. Все они своей деятельностью способствуют сохранению высокого уровня петербургской теоретической физики в наше непростое время.

*Ю. В. П.* Каковы Ваши впечатления о науке в других странах и что Вы можете сказать о Ваших встречах с великими учеными?

*А. А. Г.* Конечно, наиболее высокий уровень теоретической физики и, пожалуй, математики существует в Принстонском университете США, где работает большое количество нобелевских лауреатов, а также

такие математики как Д. Нэш и А. Уайльс, доказавший теорему Ферма, лекцию которого мне довелось там слышать. В Принстоне я контактировал с одним из создателей квантовой аксиоматики Уайтмэном, с Кошеном (автором теоремы Кошена-Шпекера) с Н. Туроком и др. Высокий уровень в Англии в “Империял колледже”, где я много общался с К. Айшемом. Во Франции вместе с моим французским коллегой Ж. Люмине мы издали книгу<sup>8</sup> с переводами работ Фридмана и Леметра. С бразильским коллегой В. Родригесом написана книга о нелокальности в квантовой теории, а с индийским физиком С. Панди — статья о квантовых эффектах в ранней Вселенной. Из встреч с великими физиками остались в памяти беседы с Я. Б. Зельдовичем, И. Р. Пригожиным в Брюсселе, Б. Д. Эспанья в Париже на конференциях в ЮНЕСКО.

*Ю. В. П.* Ваше мнение о будущем науки и, в частности, физики?

*А. А. Г.* Я думаю, что наука в будущем сосредоточится на решении одной из главных проблем человека — проблеме сознания и его места во Вселенной. Об этом я писал в своих работах по философии физики, говорил в выступлениях на междисциплинарных конференциях по науке, философии и богословию. Проблема сингулярности в космологии как точке, не принадлежащей пространству-времени и в то же время являющейся причиной всего в этом пространстве-времени, конечно, имеет отношение к Абсолютной причине в богословии. Думаю, что не последнее место в решении проблемы сознания займет квантовая теория и ее идеи, имеющие значение не только для микромира. Конечно, трудно сказать, каковы будут последствия решения этой проблемы, столь тщательно скрытой от человека. Большое значение имеет разгадка тайны скрытой материи, из которой состоит большая часть Вселенной. Что касается физики элементарных частиц, ее развитие вряд ли будет столь интенсивным как это было в 20 веке. Хотя тут возможны и неожиданности, связанные с пуском нового суперколлайдера в ЦЕРН. Новая область энергии может открыть новую физику. Учитывая же то, что из-за “скрытой массы” мы не имеем информации о большей части реальной Вселенной, новая физика может открыть и новые горизонты.

---

<sup>8</sup>A. A. Grib, J. P. Luminet. *Essais de Cosmologie. Alexander Friedmann, Georges Lemaitre*. Paris: Seuil., 1997.

## Монографии и учебники А. А. Гриба

- [1] А. А. Гриб. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. М.: Атомиздат, 1978. 128 с.
- [2] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях (методы и результаты не связанные с теорией возмущений). М.: Атомиздат, 1980. 296 с.
- [3] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988. 288 с.
- [4] А. А. Гриб. Нарушение неравенств Белла и проблема измерения в квантовой теории. Дубна: ОИЯИ Р2-92-211 (лекции для молодых ученых, вып. 59), 1992. 97 с.
- [5] A. A. Grib, S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields. St.Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing, 1994.
- [6] A. A. Grib. Early Expanding Universe and Elementary Particles. St.Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing Ltd., 1995. 124 p.
- [7] A. A. Grib, J.-P. Luminet. Essais de Cosmologie. Alexandre Friedmann, Georges Lemaître. Paris: Seuil, 1997. 342 p.
- [8] A. A. Grib, W. A. Rodrigues Jr. Nonlocality in quantum physics. New York: Kluwer Academic-Plenum Publishers, 1999. 226 p.
- [9] А. А. Гриб. Концепции современного естествознания. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2003. 311 с.
- [10] А. А. Гриб. Основные представления современной космологии. М.: Физматлит, 2008. 108 с.

# Nonsingular cosmologies with a Null Big Bang

K. A. Bronnikov\* and V. N. Melnikov†

*Centre for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS,  
46 Ozyornaya St., Moscow 119361, Russia;*

*Institute of Gravitation and Cosmology, PFUR,  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia*

We review some recent work on nonsingular homogeneous cosmological models whose time-dependent evolution begins with a Killing horizon (a Null Big Bang), beyond which there is a static region. Two kinds of such models are considered: those having a static core with a regular center and those with an asymptotically flat static region, called black universes. The former contain a variable vacuum stress tensor, generalizing the cosmological constant; the latter combine properties of black holes, wormholes and asymptotically de Sitter cosmologies. It is argued that in all such models the cosmological evolution starts without matter, which appears due to creation from vacuum.

## 1. Introduction

The recently discovered accelerated expansion of the Universe has a variety of different explanations among which are a cosmological constant (of quantum-field, multidimensional or some other origin), numerous versions of so-called dark energy (DE) (such as quintessence, k-essence, phantom matter etc.), and theories of gravity alternative to general relativity (scalar-tensor, curvature-nonlinear, multidimensional theories, different brane-world scenarios etc.).

Remaining in the framework of general relativity, we can note that, by modern observational estimates, about 70 per cent of the total density of matter in the Universe are comprised by DE with negative pressure, so that the pressure to density ratio  $w = p/\rho$  is smaller than  $-1/3$  (see, e.g., the

---

\*E-mail: kb20@yandex.ru

†E-mail: melnikov@phys.msu.ru

reviews [1, 2] and numerous references therein). A cosmological constant is known to be compatible with all observations, but it still seems that a phantom behavior of DE (such that  $w < -1$ ) is favored at small redshifts  $z < 0.3$  along with crossing the phantom divide  $w = -1$  at larger  $z$  [3] (see [1] for further references). So the existence of phantom matter (in particular, a phantom scalar field with negative kinetic energy) can be a fairly good working hypothesis, despite the well-known objections of both classical and quantum nature against such matter.

Various kinds of DE and especially phantom matter are known to violate the standard energy conditions which are valid for usual matter and fields. Therefore, consideration of DE suggests one of the ways of addressing the long-standing problems of cosmology (as well as black hole physics), the problem of singularities. A singularity is a state of the space-time geometry (and, most frequently, of matter as well) which cannot be described in the classical framework. The most common way of its understanding is to appeal to quantum gravity, assuming, e.g., a quantum birth of the Universe, but there are a number of interesting attempts to avoid a singularity classically or semiclassically. Such attempts in cosmology may be classified as follows: (a) an eternal stationary or quasistationary state followed by expansion (the so-called “emergent universes”), (b) an indefinitely long contraction phase followed by a bounce or a number of bounces (e.g., non-simultaneous bounces in different directions in an anisotropic Universe), (c) periodic or quasi-periodic evolution, and (d) cosmological expansion starting from a Killing horizon, with a static or stationary state in the absolute past.

Let us note that the first papers devoted to non-singular cosmological solutions due to certain physical effects (spontaneous symmetry breaking with a conformal scalar field [4, 5, 6] and nonlinear effects in electrodynamics [7]) appeared in the late 70s. Afterwards, there were many studies which took into account such effects as vacuum polarization, particle creation, extra dimensions etc., see, e.g., [8, 9]. See also some recent results in [10, 11, 12]. Almost all models described there are bouncing.

We would like to focus on the latter opportunity, (d). Two kinds of spherically symmetric cosmological models with horizons in the remote past have been recently discussed, one related to the notion of a variable physical vacuum [13, 14], the other to phantom fields [15, 16].

The notion of a variable physical vacuum generalizes Einstein’s cosmological term  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , associated with the maximally symmetric stress-energy tensor (SET) (all eigenvalues equal)  $T_{\mu}^{\nu} = \rho_{\text{vac}} \delta_{\mu}^{\nu}$  [17] for which  $p = -\rho_{\text{vac}}$

and  $\rho_{\text{vac}} = \text{const}$ . The SET  $\rho_{\text{vac}}\delta_{\mu}^{\nu}$  has the same form in any coordinates, hence in any reference frame; in other words, any reference frame is comoving for it. The symmetry of a vacuum SET is more narrow if only one or two of the spacelike eigenvalues of  $T_{\mu\nu}$  coincide with its timelike eigenvalue,  $T_j^j = T_t^t$  [18, 19], so that the vacuum equation of state holds in the  $j$ -th direction(s),  $p_j = -\rho$ , and thus a vacuum with reduced symmetry must be evidently anisotropic. It is now invariant under boosts in the distinguished two-dimensional Lorentzian subspace(s)  $(t, x^j)$ . Evolution of vacuum density and pressures is then governed by the conservation equation  $\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$ .

According to [13, 14], among spherically symmetric configurations with a “vacuum dark fluid”, phenomenologically defined by the SET property

$$T_0^0 = T_1^1 \quad (1)$$

(where 1 refers to a spherical radial coordinate), there is a class of models with a regular static region bounded by a horizon and, beyond it, a cosmological (T) region with a Kantowski-Sachs (KS) type metric and a de Sitter behavior at large times, able in principle to describe the present state of the Universe. In the simplest case, such models have the global causal structure coinciding with that of de Sitter space.

On the other hand, in Ref. [15] as many as 16 possible types of nonsingular spherically symmetric configurations were revealed for the case when the only source of gravity is a phantom scalar field  $\phi$  with a potential  $V(\phi)$ . Among them are asymptotically flat and AdS wormholes, bouncing KS cosmological models and some kinds of regular black holes. One of them, named “black universes” is, in our view, of particular interest. These are regular spherically symmetric black holes, with the same causal structure as the Schwarzschild space-time, but where a possible explorer, after crossing the event horizon, gets into an expanding universe instead of a singularity. Thus such hypothetic configurations combine the properties of a wormhole (absence of a center, a regular minimum of the area function) and a black hole (a Killing horizon separating R and T regions). Moreover, just as in models with a vacuum dark fluid, the KS cosmology in the T region becomes isotropic at late times and approaches a de Sitter regime of expansion, which makes such models potentially viable as models of our accelerating Universe.

In all cases it turns out that the presence of normal matter is incompatible with a transition from static to cosmological regions, which means that normal matter should be produced from vacuum at the beginning of the cosmological expansion [14, 20]. This process should be described in

terms of quantum field theory in curved space-time, which can be done using methods developed, to a large extent, by A. A. Grib and his co-workers, see [21, 22] and references therein; see also bird.

In what follows, we will briefly describe examples of both kinds of cosmologies with a Null Big Bang, those with a vacuum dark fluid in Section 2 and black universes in Section 3. In Section 4 we will discuss the appearance of usual matter in such cosmologies on the basis of Refs. [14, 20]. Section 5 is a discussion.

## 2. Cosmologies with a vacuum dark fluid

For static, spherically symmetric space-times, if the only source of gravity is a vacuum dark fluid whose SET possesses the property (1), the corresponding Einstein equation  $G_t^t = G_r^r$ , written in the conventional Schwarzschild (curvature) coordinates, leads to the relation  $g_{tt}g_{rr} = -1$ , hence the metric can be written in the form

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2d\Omega^2, \quad (2)$$

where  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  is the metric on a unit sphere.<sup>‡</sup> The arbitrary function  $A(r)$  can be expressed in terms of the so called mass function  $M(r)$ ,

$$A(r) = 1 - \frac{2GM(r)}{r}, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho_{\text{vac}}(x)x^2 dx, \quad (3)$$

where  $\rho_{\text{vac}}(r) \equiv T_t^t$  is the density profile. If, in addition, we require regularity at the center  $r = 0$ , then  $\rho(0)$  is finite, and  $M(r)$  is, as usual, interpreted as the (bare) mass inside a sphere of radius  $r$ . Near the center the metric is approximately de Sitter with the cosmological constant  $\Lambda = 8\pi G\rho(0)$  [24]. If  $\rho_{\text{vac}} = \text{const} > 0$ , we have the de Sitter metric in the whole space-time, with a single (cosmological) horizon.

If we require asymptotic flatness, then the density  $\rho_{\text{vac}}(r) > 0$  should vanish as  $r \rightarrow \infty$  quicker than  $r^{-3}$ , leading to a finite Schwarzschild mass  $m = M(\infty)$ . The obtained de Sitter-Schwarzschild geometry, asymptotically de Sitter as  $r \rightarrow 0$  and asymptotically Schwarzschild as  $r \rightarrow \infty$ ,

---

<sup>‡</sup>Our sign conventions are: the metric signature  $(+ - - -)$ , the curvature tensor  $R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \dots$ , so that, e.g., the Ricci scalar  $R > 0$  for de Sitter space-time, and the stress-energy tensor (SET) such that  $T_t^t$  is the energy density. The Einstein equations have the form  $G^\nu_\mu = -\varkappa T^\nu_\mu$ ,  $\varkappa = 8\pi G$ , where  $G$  is the Newtonian gravitational constant; the units are natural,  $c = \hbar = 1$ .

describes either a vacuum nonsingular black hole or a particlelike structure (lump) without horizons in the Minkowski background [18]. The global structure of such de Sitter-Schwarzschild space-times is trivial for lumps and coincides with that of extremal or non-extremal Reissner-Nordström black holes in the cases with one or two horizons, respectively, with the important difference that now the Reissner-Nordström central singularities are replaced by regular cores with de Sitter vacuum near  $r = 0$ .

Assuming that at large  $r$  the density  $\rho_{\text{vac}}$  tends to a small value  $\rho_{\text{vac}}(\infty) = \lambda/\varkappa > 0$ , we obtain a de Sitter asymptotic

$$A(r) \approx -\lambda r^2/3 \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Depending on the particular form of  $\rho_{\text{vac}}(r)$ , the function  $A(r)$ , beginning with  $A(0) = 1$  at a regular center may have one or more zeros that correspond to Killing horizons; see [13] for more details on the geometry and the global causal structure of these space-times. Generic situations are those with one or three horizons, and in the simplest case with a single horizon the global structure is the same as for de Sitter space-time.

The asymptotically de Sitter regions of such two-lambda configurations represent, as any spherically symmetric T regions, KS cosmological models. The metric (2), where now  $r$  is the temporal coordinate, can be rewritten in the form

$$ds^2 = \frac{1}{b^2(r)} dr^2 - b^2(r) dx^2 - r^2 d\Omega_1^2 \quad (5)$$

where  $b^2(u) = |A(r)|$  and the spatial coordinate  $x$  re-denotes the former  $t$ . The KS evolution starts from a null bang at a horizon. This initial state with a finite value of  $r$  is, from the viewpoint of comoving observers in the model (5), a highly anisotropic, purely coordinate singularity where the spatial section, having the topology of a 3-cylinder, is squeezed along the ‘‘longitudinal’’ direction  $x$  due to vanishing  $b(r)$ . The 4-geometry is, however, globally regular. The KS evolution at late times corresponds to the de Sitter large  $r$  asymptotic where

$$\begin{aligned} ds^2 &= (H^2 r^2 - 1)^{-1} dr^2 - (H^2 r^2 - 1) dx^2 - r^2 d\Omega_1^2 \\ &= d\tau^2 - \sinh^2(H\tau) dx^2 - H^{-2} \cosh^2(H\tau) d\Omega_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

with the proper time  $\tau$  and the Hubble parameter  $H = \sqrt{\lambda/3}$ .

### 3. A black universe from a phantom scalar

Consider now the general static, spherically symmetric metric, writing



it in the form

$$ds^2 = A(u)dt^2 - \frac{du^2}{A(u)} - r^2(u)d\Omega^2, \quad (7)$$

with the ‘‘quasiglobal’’ coordinate  $u$ , which is particularly convenient for dealing with Killing horizons where it behaves in the same way as the manifestly well-behaved Kruskal-like null coordinates. For this reason, in terms of  $u$ , one may consider regions on both sides of such a horizon remaining in a formally static framework. Note that in the previous section the Schwarzschild coordinate  $r$  coincided with the quasiglobal coordinate  $u$  due to the Einstein equations and the property (1) of the SET. The scalar field SET does not possess this property, and now the  $u$  coordinate is not Schwarzschild,  $r(u) \neq u$ .

In (7), the geometry is entirely determined by two functions,  $A(u)$  (often called the redshift function) and  $r(u)$  (the area function, equal to the radius of a coordinate sphere at given  $u$ ). Horizons correspond to regular zeros of  $A(u)$ .

Our interest here is to find black-universe solutions which, by definition, must have the following properties:

1. regularity in the whole range  $u \in \mathbb{R}$ ;
2. asymptotic flatness as  $u \rightarrow -\infty$  (without loss of generality), i.e.,  $r(u) \approx -u$ ,  $A(u) \rightarrow 1$ ;
3. a de Sitter asymptotic as  $u \rightarrow +\infty$ , i.e., a T region ( $A < 0$ ) where  $r(u) \sim u$ ,  $-A(u) \sim u^2$ ;
4. there must be a single simple horizon (i.e., a simple zero of  $A(u)$ ) at finite  $u$ .

As shown in [16], such solutions can exist in general relativity with various phantom sources. Let us here present the simplest example with a minimally coupled scalar field having the Lagrangian

$$L_\phi = \frac{1}{2}\varepsilon\partial^\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi), \quad (8)$$

where  $\varepsilon = +1$  corresponds to normal scalar fields with positive kinetic energy,  $\varepsilon = -1$  to phantom fields, and  $V(\phi)$  is a potential.

The set of Einstein-scalar equations for the metric (7) and  $\phi = \phi(u)$  may

be written in the form

$$\varepsilon(Ar^2\phi')' = -r^2 dV/d\phi, \quad (9)$$

$$(A'r^2)' = -2r^2V; \quad (10)$$

$$2r''/r = \varepsilon\phi'^2; \quad (11)$$

$$A(r^2)'' - r^2A'' = 2, \quad (12)$$

where the prime denotes  $d/du$ . The scalar field equation (9) is a consequence of Eqs. (10)–(12), which, given a potential  $V(\phi)$ , form a determined set of equations for the unknowns  $r(u)$ ,  $A(u)$ ,  $\phi(u)$ .

As is evident from (11), black-universe solutions cannot be obtained with  $\varepsilon = +1$  because in this case  $r'' \leq 0$  which is incompatible with requirements 1-3 (instead of  $u \in \mathbb{R}$ , there will be inevitably  $r = 0$  at some finite  $u$ , which is either a singularity or, at best, a regular center).

A particular solution to these equations with  $\varepsilon = -1$  is given by [15]

$$r = (u^2 + b^2)^{1/2}, \quad b = \text{const} > 0; \quad (13)$$

$$B(u) \equiv \frac{A(u)}{r^2(u)} = \frac{c}{b^2} + \frac{1}{b^2 + u^2} + \frac{u_0}{b^3} \left( \frac{bu}{b^2 + u^2} + \arctan \frac{u}{b} \right), \quad (14)$$

$$\phi = \pm\sqrt{2} \arctan(u/b) + \phi_0, \quad (15)$$

$$V = -\frac{c}{b^2} \frac{r^2 + 2u^2}{r^2} - \frac{u_0}{b^3} \left( \frac{3bu}{r^2} + \frac{r^2 + 2u^2}{r^2} \arctan \frac{u}{b} \right) \quad (16)$$

with  $c$ ,  $u_0$ ,  $\phi_0 = \text{const}$ . In particular,

$$B(\pm\infty) = -\frac{1}{3}V(\pm\infty) = \frac{2bc \pm \pi u_0}{2b^3}. \quad (17)$$

Choosing in (15), without loss of generality, the plus sign and  $\phi_0 = 0$ , we obtain for  $V(\phi)$  ( $\psi := \phi/\sqrt{2}$ ):

$$V(\phi) = -\frac{c}{b^2}(3 - 2\cos^2\psi) - \frac{u_0}{b^3} [3\sin\psi\cos\psi + \psi(3 - 2\cos^2\psi)]. \quad (18)$$

The solution is asymptotically flat at large negative  $u$  ( $B \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow 1$ ) under the condition  $2bc = \pi u_0$ , and the Schwarzschild mass, defined in the usual way, is then  $m = -u_0/3$ . Then, assuming  $m > 0$ , we find that  $B(+\infty) = -3\pi m/b^3 = \text{const} < 0$ , which corresponds to a de Sitter

asymptotic with a cosmological constant  $\Lambda > 0$ . The horizon position is found by solving the transcendental equation  $B(u) = 0$ .

This is an example of a black-universe solution. Other cases of the solution (13)–(16) include wormholes and asymptotically AdS configurations, see more details in [15, 16].

## 4. Cosmology with a null bang and usual matter

The real Universe can be vacuum (or DE) dominated in some epochs, but certainly contains other sources of gravity which affect its evolution. A general study [20] of the conditions at and near a horizon of a KS space-time in the presence of a vacuum dark fluid whose SET satisfies (1) and some other matter has shown that (among other observations)

1. In the presence of normal matter, respecting the Null Energy Condition, regular evolution of a KS cosmology can begin with a Killing horizon only. Assuming such regularity, hence the existence of a horizon, further properties are proved.
2. Normal matter is absent at the horizon. Items 1 and 2 are valid irrespective of whether or not normal matter obeys the conservation law, e.g., whether or not it interacts with the dark fluid.
3. Normal non-interacting matter cannot emerge in the cosmological region. It can only appear there due to interaction with the dark fluid. This restriction is absent for phantom matter that violates the NEC, with some particular values of  $w = p_{mx}/\rho \leq -3$ , the value  $-3$  being generic. Here,  $\rho$  and  $p_{mx}$  are the density of matter and its pressure in the  $x$  direction, respectively.

Concerning configurations with normal matter, it was concluded [20] that the static region, preceding a regular KS evolution, should be filled with a vacuum fluid only; the latter can provide the existence of a regular centre with an asymptotically de Sitter geometry [13, 14].

This reasoning did not rely on any particular equation of state: even the behavior of the transverse pressure was not restricted except for the requirement of its regularity. In this sense, the conclusions of [20] are model-independent.

These properties, valid for any normal matter, were previously established in [14] for dustlike matter. Moreover, the evolution of a non-interacting mixture of dust with a vacuum dark fluid in the KS framework admits a general exact solution in quadratures. Indeed, the general KS metric can be written in the form

$$ds^2 = e^{2\gamma(t)} dt^2 - a^2(t) dx^2 - r^2(t) d\Omega^2 \quad (19)$$

where  $e^{2\gamma}$  is a lapse function while  $a(t)$  and  $r(t)$  are the two scale factors of the KS geometry. Then, let us choose the time coordinate  $t \equiv r$  (which is similar to choosing the Schwarzschild radial coordinate in a static, spherically symmetric metric) and consider the Einstein equations with the SET

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(\rho_d + \rho_{\text{vac}}, \rho_{\text{vac}}, -p_{v\perp}, -p_{v\perp}), \quad (20)$$

where  $\rho_d$  is the dust density and  $p_{v\perp}$  is the vacuum transverse pressure. Then [14] the lapse function is found provided that we know the vacuum density profile  $\rho_{\text{vac}}(r)$ :

$$e^{-2\gamma} = -1 + \frac{2M(r)}{r}, \quad M(r) := 4\pi G \int \rho_v r^2 dr. \quad (21)$$

The function  $M(r)$  is similar to the mass function introduced in (3) for static, spherically symmetric configurations. The result (21) is obtained without using the conservation laws for dust and vacuum and is even valid when they are interacting.

For stages without interaction between dust and vacuum, using the conservation laws valid separately for each of them, we obtain [14]

$$\rho_d = \mu_0/[a(r)r^2], \quad \mu_0 = \text{const}, \quad (22)$$

and the relation for vacuum

$$\rho_v' + \frac{2}{r}(\rho_v + p_{v\perp}) = 0 \quad (23)$$

which expresses  $\rho_{v\perp}$  in terms of  $\rho_v$ . For  $a(r)$  we get

$$a(r) = 4\pi G \mu_0 e^{-\gamma} \int \frac{dr}{r} e^{3\gamma}, \quad (24)$$

$e^{\gamma}$  being given by (21). This completes the solution. The physical time  $\tau$  is obtained by integration,

$$\tau = \int e^{\gamma(r)} dr, \quad (25)$$

and all unknowns are expressed as functions of  $\tau$  in a parametric form.

Further estimates were obtained in [14] for the particular vacuum density profile

$$\rho_{\text{vac}} = \rho_c e^{-r^3/r_*^3} + \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = \frac{\lambda}{8\pi G}, \quad \rho_c, r_*, \lambda = \text{const} > 0, \quad (26)$$

The first term results from a simple semiclassical model for vacuum polarization in spherically symmetric gravitational fields [18, 24]. The second term refers to a background cosmological constant at the scale suggested by observations.

We thus have three distinct length scales:  $r_c = \sqrt{3/(8\pi G\rho_c)}$ , a de Sitter radius corresponding to the central density  $\rho_c$ , the scale  $r_* \sim (r_c^2 r_g)^{1/3}$  characterizing the vacuum decay rate in the spherically symmetric gravitational field ( $r_g$  is the Schwarzschild radius related to the total gravitational mass of the decaying vacuum), and the scale  $r_\lambda$  related to the background cosmological constant  $\lambda$ , assumed to be of the present Hubble order of magnitude,  $\lambda \sim 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ ,  $r_\lambda \sim 10^{28} \text{ cm}$ . We assume that the central density  $\rho_c$  is of the GUT scale,

$$\rho_c \approx (10^{15} \text{ GeV})^4 \approx 2.2 \cdot 10^{75} \text{ g/cm}^3 \Rightarrow r_c \approx 0.8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}, \quad (27)$$

and  $r_* \approx 4.6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$  for  $r_g$  of the Hubble order,  $\sim 10^{28} \text{ cm}$ . Then the above solution leads to the following estimates [14].

The horizon radius  $r_h \approx r_c$  with high accuracy since  $r_* \gg r_c$  and the density is almost constant in the static region.

The vacuum decay time  $\tau_v$  (from  $\tau = 0$  at the horizon) is about  $51.6 r_c \approx 1.3 \cdot 10^{-34}$  seconds. At  $\tau = \tau_v$ , the first term in (26) is equal to the second one, and further on the evolution actually proceeds with the cosmological constant  $\lambda$ .

This value is rather close to the GUT parameters, while by this time the scale factor  $r$  has already inflated from  $r = r_h \approx 0.8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}$  to  $r_f \approx 6.3 b r_c \approx 2.8 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ . The other scale factor,  $a(r)$ , has inflated from zero at the horizon to a finite value of the same order of magnitude.

The inflation of  $r$  corresponds to approximately 43 e-foldings which is not regarded sufficient in conventional inflationary cosmology. However, in this class of models inflation as such is not necessary because, due to the existence and observability of a static core in the remote past, all parts of our model Universe are causally connected.

The anisotropy parameter

$$\mathcal{A} = \frac{H_a - H_r}{H_a + 2H_r} \quad (28)$$

(where  $H_a = a^{-1}da/d\tau$  and  $H_r = r^{-1}dr/d\tau$  are the directional Hubble parameters) quickly decays, and already in the recombination epoch ( $r \sim 10^{25}$  cm), belonging to the matter-dominated period, we obtain  $\mathcal{A} \lesssim 10^{-48}$ , a degree of isotropy far exceeding the observational constraint ( $\mathcal{A} \lesssim 10^{-9}$ ). This follows directly from the condition that both scale factors monotonically grow after crossing the horizon [14].

These estimates show that models of this kind are potentially viable.

For black-universe models such estimates have not been made, but their cosmological evolution is qualitatively the same as that for the vacuum fluid models, and it is easy to show that at crossing a horizon the SET structure of the phantom scalar field is the same as that of the vacuum fluid, i.e., the condition (1) holds.

## 5. Concluding remarks

Any KS cosmology is necessarily anisotropic for topological reasons and can only isotropize asymptotically at large  $r$ . This anisotropy, however, can be small enough to meet all the observational constraint.

Indeed, observations of the cosmic microwave background require that at the recombination epoch, at which the electromagnetic radiation has decoupled from matter (at redshifts  $z \approx 1000$ ), the anisotropy factor  $\mathcal{A}$  could not exceed  $10^{-6}$ , whence it follows that at present it is at most of order  $10^{-9}$  [25]. We have seen that at least some models with a null big bang are automatically sufficiently isotropic. This confirms the potential viability of this kind of models.

The analysis of the epoch right after the null bang in the framework of classical theory gives indirect evidence in favor of the origin of matter in the Universe due to creation from vacuum along with isotropization, the process which has been discussed from different viewpoints since the 60s of last century: one can mention, e.g., the books [26, 21, 23] with vast bibliography and many later papers, including the recent ones by A. A. Grib and Yu. V. Pavlov [22]. A thorough analysis of particle creation close to a cosmological horizon is yet to be performed. It is also of interest to find

non-spherically symmetric models with a Null Big Bang, i.e., outside the Kantowski-Sachs framework.

This work was supported in part by NPK MU grant of Peoples' Friendship University of Russia.

## References

- [1] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 2105 (2006); astro-ph/0610026.
- [2] E. J. Copeland, M. Sami and Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [3] U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinsky, *JCAP* **0406**, 008 (2004); D. Huterer and A. Cooray, *Phys. Rev. D* **71**, 023506 (2005).
- [4] A. A. Grib, V. M. Mostepanenko and V. M. Frolov, *Teor. Mat. Fiz.* **37**, 347 (1978).
- [5] V. N. Melnikov, *Dokl. Akad. Nauk* **246**, 1351 (1979).
- [6] V. N. Melnikov and S. V. Orlov *Phys. Lett.* **A70**, 263 (1979).
- [7] M. Novello and J. Salim, *Phys. Rev. D* **20**, 377 (1979).
- [8] K. P. Staniukovich and V. N. Melnikov, *Hydrodynamics, Fields and Constants in the Theory of Gravitation*, Energoatomizdat, Moscow, 1983 (in Russian). See an updated English translation of the first 5 chapters in: V. N. Melnikov, *Fields and Constants in the Theory of Gravitation*, CBPF MO-02/02, Rio de Janeiro, 2002.
- [9] V. N. Melnikov, in: *Cosmology and Gravitation*, ed. M. Novello, Editions Frontieres, Singapore, 1994, p. 147; in: *Cosmology and Gravitation, II*, ed. M. Novello, Editions Frontieres, Singapore, 1996, p. 465; V. N. Melnikov, *Exact Solutions in Multidimensional Gravity and Cosmology III*, CBPF-MO-03/02, Rio de Janeiro, 2002, 297 pp.
- [10] J.-M. Alimi, V. D. Ivashchuk, S. A. Kononogov and V. N. Melnikov, *Grav. Cosmol.* **12**, 173–178 (2006); gr-qc/0611015.
- [11] V. D. Ivashchuk, S. A. Kononogov, V. N. Melnikov and M. Novello, *Grav. Cosmol.* **12**, 273–278 (2006); hep-th/0610167.
- [12] V. N. Melnikov, *On non-singular solutions in multidimensional cosmology*, in: Proc. BSCG-2008, AIP Conf. Proc., 2009.

- [13] K. A. Bronnikov, A. Dobosz and I. G. Dymnikova, *Class. Quantum Grav.* **20**, 3797 (2003).
- [14] K. A. Bronnikov and I. G. Dymnikova, *Class. Quantum Grav.* **24**, 5803 (2007).
- [15] K. A. Bronnikov and J. C. Fabris, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 251101 (2001).
- [16] K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov and H. Dehnen, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 973 (2007).
- [17] E. B. Gliner, *Sov. Phys. JETP* **22** 378 (1966).
- [18] I. G. Dymnikova, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 235 (1992).
- [19] I. G. Dymnikova, *Phys. Lett.* **472B**, 33 (2000).
- [20] K. A. Bronnikov and O. B. Zaslavskii, *Class. Quantum Grav.* **25**, 105015 (2008).
- [21] A. A. Grib, S. G. Mamaev and V. M. Mostepanenko, *Quantum Effects in Strong External Fields*, Atomizdat, Moscow, 1980 (in Russian).
- [22] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Grav. Cosmol.* **8**, Suppl. 1, 148 (2002), gr-qc/0206040; *Grav. Cosmol.* **15**, 44–48 (2009).
- [23] N. Birrell and P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [24] I. G. Dymnikova, *Class. Quantum Grav.* **19**, 225 (2002).
- [25] P. Aguiar and P. Crawford, *Phys. Rev. D* **62**, 123511 (2000).
- [26] K. P. Staniukovich, *Gravitational Field and Elementary Particles*, Nauka, M., 1965 (in Russian).



# Космологическая модель с полями Янга-Миллса-Хиггса

Д. В. Гальцов\* и Е. А. Давыдов†

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

Посвящается 70-летию Андрея Анатольевича Гриба

## 1. Введение

Традиционное понимание динамики ранней Вселенной связано со скалярными полями. Скалярное поле с потенциалом специального вида позволяет наиболее просто описать инфляционную стадию космологического расширения [1], а также смоделировать ускоренное расширение в современную эпоху [2]. Однако понимание физической природы инфлатона и теоретическое обоснование выбора скалярного потенциала представляют серьезную проблему, которая до сих пор не имеет однозначного решения. Поэтому поиск альтернативных моделей инфляции представляется по-прежнему актуальным. В качестве альтернативы скалярным полям предлагались векторные поля [4, 5], которые являются важнейшей составляющей стандартной модели. На этом пути возникает проблема изотропии, так как однородное векторное поле создает выделенное направление в пространстве, за исключением чисто электрических конфигураций, по существу являющихся скалярными. Для получения однородных и изотропных конфигураций более общего вида необходим как минимум триплет векторных полей, которые в совокупности могут обеспечить изотропию. Такая ситуация естественно возникает в неабелевых калибровочных моделях, в которых как правило присутствует  $SU(2)$  поле Янга-Миллса [3, 8]. Триплет  $SU(2)$  векторных полей допускает однородные и изотропные конфигурации [3], параметризуемые одним скалярным полем, причем размерная редукция к одномерию, возникающая в контексте фидридмановских

---

\*E-mail: [galtsov@phys.msu.ru](mailto:galtsov@phys.msu.ru)

†E-mail: [eugene00@mail.ru](mailto:eugene00@mail.ru)

моделей, приводит к появлению потенциала типа Хиггса. Однако в случае стандартного лагранжиана Янга-Миллса такая модель непригодна для описания инфляции, так как в силу конформной симметрии соответствующее уравнение состояния совпадает с уравнением состояния горячей модели. Другие лагранжианы, такие как мотивированный теорией струн лагранжиан Борна-Инфельда [6], либо лагранжианы, учитывающие квантовые поправки [7], приводят к нарушению конформной симметрии различной степени. Это может представлять интерес в аспекте проблемы темной энергии. Ранее космологические модели с полями Янга-Миллса обсуждались также в квантовой гравитации [10, 11]. В настоящей работе рассматривается замкнутая однородная и изотропная фридмановская космология с  $SU(2)$  полем Янга-Миллса и комплексным дублетом Хиггса, которые входят в бозонный сектор. Интерес к этой модели обусловлен тем, что скалярный комплексный дублет Хиггса, также допускающий в этом случае однородные и изотропные конфигурации, приводит к нарушению конформной симметрии и появлению инфляционных режимов.

## 2. Однородные и изотропные поля Янга-Миллса-Хиггса

Запишем стандартное действие в  $SU(2)$  теории Эйнштейна-Янга-Миллса с комплексным дублетом Хиггса:

$$S = \int \left[ -\frac{R}{2\kappa^2} + \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2 \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (1)$$

Здесь  $R$  — скалярная кривизна,  $F_{\mu\nu}$  — тензор неабелевого калибровочного поля  $A_\mu$ . В фундаментальном представлении поле Хиггса  $\Phi$  является комплексным дублетом; ковариантная производная равна

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + A_\mu\Phi. \quad (2)$$

Мы рассмотрим закрытую фридмановскую модель, параметризуя интервал в виде

$$ds^2 = N(t)dt^2 + a^2(t)(dr^2 + \sin^2 r d\Omega). \quad (3)$$

Анзац для полей Янга-Миллса и Хиггса удобно представить с помощью

генераторов  $SU(2)$  в сферических координатах

$$T_r = \frac{1}{2i}(\tau_1 \sin \theta \cos \phi + \tau_2 \sin \theta \sin \phi + \tau_3 \cos \theta), \quad T_\theta = \partial_\theta T_r, \quad T_\phi = \frac{\partial_\phi T_r}{\sin \theta}, \quad (4)$$

где  $\tau_i$  — матрицы Паули. Нетрудно убедиться, в том, что конфигурация следующего вида (подробнее о построении космологического анзаца см. в [9, 13]):

$$A = e^{\frac{1-w}{2}} U dU^{-1}, \quad \Phi = fU\Phi_0, \quad U = \exp(2rT_r), \quad (5)$$

где  $w$  и  $f$  — скалярные функции переменной  $t$ , а  $\Phi_0$  — постоянный изоспинор, удовлетворяет условиям однородности и изотропии. Причем такая конфигурация существует только в случае закрытой модели, поскольку именно этом случае пространственное многообразие  $S^3$  совпадает с группой преобразований калибровочного поля  $SU(2) \sim S^3$ .

Подставляя (5) в действие и интегрируя по  $S^3$ , получим одномерное действие материи:

$$S_m = \int (T + K - V - W - V_{int}) N a^3 dt, \quad (6)$$

где слагаемые имеют следующий смысл:

- кинетический член для скалярного поля

$$T = \frac{\dot{f}^2}{N^2}, \quad (7)$$

- кинетический член для калибровочного поля

$$K = \frac{3}{2N^2 a^2} \dot{w}^2, \quad (8)$$

- потенциал скалярного поля

$$V = \frac{\lambda}{4} (f^2 - v^2)^2, \quad (9)$$

- эффективный потенциал калибровочного поля, возникающий при размерной редукции

$$W = \frac{3}{2e^2 a^4} (w-1)^2 (e(w-1) + 2)^2, \quad (10)$$

- потенциал взаимодействия скалярного и калибровочного полей

$$V_{int} = \frac{3}{4a^2} f^2 (e(w-1) + 2)^2. \quad (11)$$

Заметим, что потенциал  $W$  не имеет такой симметричной формы, как  $V$ . Замена переменных

$$w = 1 + (\tilde{w} - 1)/e, \quad a = \tilde{a}/e, \quad \lambda = \tilde{\lambda}e^2, \quad t = \tilde{t}/e, \quad (12)$$

позволяет исключить заряд  $e$  калибровочного поля из лагранжиана: он выносится как общий множитель  $e^2$ . Результат для подынтегрального выражения в действии эквивалентен фиксации  $e = 1$  в анзаце для калибровочного поля:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-w}{2} U dU^{-1}, \\ W &= \frac{3}{2a^4} (w^2 - 1)^2, \\ V_{int} &= \frac{3}{4a^2} f^2 (w+1)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь потенциал  $W$  калибровочного поля становится симметричен по  $w$ .

### 3. Полевые уравнения

Действие для гравитации в случае однородной и изотропной закрытой модели имеет вид:

$$S_g = \int \frac{3}{\kappa^2 N^2} (N^3 + N\dot{a}^2 + Na\ddot{a} - \dot{N}a\dot{a}) dt. \quad (14)$$

Вариация по  $N$  дает уравнение связи

$$\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \rho, \quad (15)$$

после чего удобно фиксировать калибровку  $N = 1$ . Вариация по масштабному фактору  $a$  приводит к уравнению

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 1}{a^2} = -\kappa^2 p, \quad (16)$$

откуда имеем

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p). \quad (17)$$

В этих формулах плотность материи  $\rho$  и давление  $p$  определяются варьированием лагранжиана материи  $L_m$  по метрике:

$$\rho = -\left. \frac{\partial(L_m N)}{\partial N} \right|_{N=1}, \quad p = \frac{1}{3a^2} \frac{\partial(L_m a^3)}{\partial a}. \quad (18)$$

Удобно перейти к безразмерным величинам, это позволит устранить вакуумное среднее  $v$  из лагранжиана:

$$\tilde{f} = f v^{-1}, \quad \tilde{a} = a v, \quad \tilde{t} = t v, \quad \tilde{\kappa}^2 = \kappa^2 v^2. \quad (19)$$

Символ “тильда” над безразмерными величинами мы далее опускаем.

Варьирование лагранжиана по полям материи  $f$  и  $w$  приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f} &= -\frac{3}{2a^2}f(w+1)^2 - \lambda(f^2 - 1)f, \\ \ddot{w} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{w} &= -\frac{3}{2}f^2(w+1) - \frac{6}{a^2}(w^2 - 1)w. \end{aligned} \quad (20)$$

Плотность энергии оказывается равной сумме величин (7-11):

$$\rho = T + K + V + W + V_{int}, \quad (21)$$

а давление имеет вид

$$p = T - V + \frac{K}{3} + \frac{W}{3} - \frac{V_{int}}{3}. \quad (22)$$

Таким образом, помимо потенциала Хиггса, отрицательное давление порождается также и потенциалом взаимодействия скалярного и калибровочного поля  $V_{int}$ . Однако этот член не дает вклада в уравнение для космологического ускорения:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{3}(2T + K - V + W). \quad (23)$$

Поэтому, в данной системе положительное ускорение может порождаться только потенциалом поля Хиггса.

Рассмотрим выполнимость энергетических условий

$$\begin{aligned}
 NEC : \quad & \rho + p \geq 0, \\
 WEC : \quad & \rho + p \geq 0, \quad \rho \geq 0, \\
 SEC : \quad & \rho + 3p \geq 0, \quad \rho + p \geq 0, \\
 DEC : \quad & \rho \pm p \geq 0, \quad \rho \geq 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Вычислив соответствующие линейные комбинации величин  $\rho$  и  $p$  легко видеть, что сильное энергетическое условие (SEC) может нарушаться, т.е. выражение  $\rho + 3p$ , пропорциональное правой части уравнения (23), не является положительно определенным. Остальные энергетические условия выполнены. Нарушение SEC означает что в системе возможен режим ускоренного расширения  $\ddot{a} > 0$ .

### 3.1 Частные решения

Аналитические решения системы уравнений движения и уравнений Фридмана существуют только в специальных случаях. Можно подобрать такие начальные условия, при которых динамика одного из полей материи будет отсутствовать. Если положить  $w = -1$ , то калибровочное поле исчезает, и система будет полностью соответствовать модели скалярного поля с потенциалом Хиггса. Подобные конфигурации подробно рассмотрены в литературе.

Скалярное поле полностью отключить нельзя. Минимум потенциала Хиггса при  $f = \pm 1$  не является минимумом потенциала взаимодействия  $V_{int}$ . А полностью вакуумная конфигурация  $f = \pm 1$ ,  $w = -1$  противоречит выбору закрытой вселенной. Состояние  $f = 0$ , соответствующее локальному максимуму потенциала Хиггса, является статическим решением для скалярного поля. Тогда ненулевая потенциальная энергия поля Хиггса будет играть роль космологической постоянной. В этом случае также можно получить аналитическое решение. Плотность энергии будет равна  $\rho = V(0) = \lambda/4$ . Тогда из условия связи (15) получим уравнение

$$\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} = \frac{\kappa\lambda}{12} \equiv \frac{\gamma^2}{4}, \tag{25}$$

очевидное решение которого при  $\dot{a}(0) = 0$  имеет вид:

$$a = \frac{2}{\gamma} \cosh \frac{\gamma t}{2}. \tag{26}$$

В общем случае калибровочному полю будет соответствовать уравнение состояния

$$p = \frac{\rho - \lambda}{3}. \quad (27)$$

Подставив это соотношение в уравнение непрерывности

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (28)$$

после тривиального интегрирования получим

$$\rho = \frac{\lambda}{4} + \frac{C}{a^4}, \quad (29)$$

где  $C \geq 0$  - константа интегрирования. Например, для сфалеронной конфигурации, когда  $f = w = 0$  и динамика полей отсутствует, плотность энергии равна

$$\rho = V + W = \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{2a^4}, \quad (30)$$

откуда получаем  $C = 3/2$ .

Теперь можно решить уравнение связи относительно масштабного фактора:

$$4\dot{a}^2 = \gamma^2 a^2 + \frac{\eta^4}{a^2} - 4, \quad \eta^2 \equiv 2\sqrt{\frac{\kappa C}{3}}. \quad (31)$$

В отсутствие скалярного поля ( $\lambda = 0$ ), решением для (31) будет

$$a = a_0 \sqrt{\frac{\eta^4}{4} - (t - t_0)^2}, \quad (32)$$

описывающее космологическую сингулярность в горячей вселенной. В отсутствие калибровочного поля ( $C = 0$ ) решением будет (26).

Если же  $\lambda$  и  $C$  не равны нулю, то простое решение получается, когда правая часть (31) представима в виде полного квадрата. Для этого должно выполняться соотношение между константами:

$$\gamma\eta^2 = 2. \quad (33)$$

Извлекая из уравнения связи квадратный корень, получим

$$2a\dot{a} = \gamma a^2 - \frac{2}{\gamma}. \quad (34)$$

Тогда решением для масштабного фактора будет

$$a = \sqrt{\frac{2}{\gamma^2} + \left(a_0^2 - \frac{2}{\gamma^2}\right) e^{\gamma t}}, \quad (35)$$

где  $a(0) = a_0$ . Вообще говоря, уравнение связи инвариантно относительно обращения времени. Если  $a(t)$  - решение, то  $a(-t)$  также будет решением. Поэтому, для краткости мы не пишем знак “±” в уравнении (34) и в ответах для  $a(t)$  перед временной переменной  $t$ .

В зависимости от значения параметров будет наблюдаться космологическая сингулярность или инфляция. При  $a_0 = \sqrt{2}/\gamma$  решением будет статическая вселенная  $a(t) = a_0$ : отрицательное давление скалярного поля точно компенсируется притяжением калибровочного поля.

Если правая часть (31) не является полным квадратом, то аналитическое выражение для зависимости масштабного фактора от времени будет немного более громоздким:

$$a = \sqrt{\frac{e^{-\gamma t}}{4\gamma^4 \tilde{C}}(4 - \gamma^2 \eta^4) + \frac{2}{\gamma^2} + \tilde{C} e^{\gamma t}}. \quad (36)$$

Здесь константу интегрирования было удобнее ввести как  $\tilde{C}$ .

## 4. Динамическая система

В общем случае, аналитическое решение полной нелинейной системы (20) получить невозможно. Приведем ее качественный анализ методами динамических систем. В действии (6) присутствуют два потенциала  $V$  и  $W$  типа “мексиканской шляпы” для каждого из полей материи  $f$  и  $w$ , а также потенциал взаимодействия  $V_{int}$ , квадратичный по полям. Поэтому линеаризованная система уравнений оказывается нетривиальной.

### 4.1 Особые точки

Вначале найдем особые точки системы уравнений (20) и (23). Для этого перейдем к системе первого порядка вида  $\dot{X} = A(X)$ , вводя новые переменные

$$\dot{f} = \phi, \quad \dot{w} = \omega, \quad \dot{a} = \chi. \quad (37)$$

Тогда  $X$  - вектор  $\{f, w, a, \phi, \omega, \chi\}$ , а матрица  $A$  находится из уравнений (20), (23) и (37). Особые точки  $X_0$  в 6-мерном фазовом пространстве



удовлетворяют уравнению  $A(X_0) = 0$ . Удобно сгруппировать полевые переменные в два вектора: обобщенной координаты  $Q = \{f, w, a\}$  и импульса  $P = \{\phi, \omega, \chi\}$ .

Из уравнения (37):  $Q = P$ , находим решение  $P_0 = 0$ . Подставляя его в (20) и (23), получаем систему уравнений относительно координат  $Q_0$  особых точек системы:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2a^2}f(w+1)^2 + \lambda(f^2-1)f &= 0, \\ \frac{3}{2}f^2(w+1) + \frac{6}{a^2}(w^2-1)w &= 0, \\ \frac{\lambda}{4}a(f^2-1)^2 - \frac{3}{2a^3}(w^2-1)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Решением будет некоторый вектор, зависящий от параметра:  $Q_0 = Q_0(\lambda)$ . Подставляя его в уравнение связи (15), получим

$$\frac{\kappa}{3}a_0^2(\lambda)\rho(\lambda) = 1. \quad (39)$$

Заметим, что не всякое решение (38) удовлетворяет уравнению связи: например, вакуумное состояние  $f = \pm 1, w = -1$  не годится. Кроме того, особые точки системы уравнений движения реализуются в пространстве параметров  $\{\lambda, \kappa\}$  только на кривой, задаваемой уравнением (39).

Очевидно, что  $f = w = 0$  удовлетворяет первым двум уравнения системы (38), а из третьего находим полное решение:

$$f = 0, \quad w = 0, \quad a = \left(\frac{6}{\lambda}\right)^{1/4}. \quad (40)$$

Это статическое решение уже было найдено в предыдущем разделе в виде  $a_0 = \sqrt{2}/\gamma$ .

Непосредственным вычислением можно найти последнее решение системы (38):

$$w = \frac{l-1}{l+1}, \quad f = \sqrt{w}, \quad a = 2\sqrt{1-w}, \quad (41)$$

где  $l = \sqrt{8\lambda/3}$ . Отметим, что в пределе  $l \rightarrow 1+0$  это решение совпадает с предыдущим. При  $l < 1$  решения вида (41) не существует.

Попробуем дать наглядное описание особых точек, соответствующих полученным выше решениям. При  $l > 1$  в первом случае поле  $f$

сидит в локальном максимуме своего потенциала  $V: f = 0$ . При этом, потенциал взаимодействия  $V_{int} = 0$ , и у потенциала поля  $w$  есть три особые точки, когда  $\partial W_{eff}/\partial w = 0$ . Это вакуумы  $w = \pm 1$  и локальный максимум  $w = 0$ . Вакуумные состояния не удовлетворяют системе уравнений (38), а конфигурация, составленная из двух локальных максимумов  $f = 0$ ,  $w = 0$  соответствует решению (40).

Во втором случае поле  $f$  скатывается к своему минимальному значению. У эффективного потенциала для поля  $w$  смещаются локальный максимум и правый минимум, определяемые теперь по формуле  $w_{max/min} = (1 \pm \sqrt{1 - a^2 f^2})/2$ . Абсолютный минимум исключается уравнением связи, а нахождение  $w$  в локальном минимуме или максимуме определяется из системы (38). Оба эти экстремума не могут удовлетворять ей одновременно, так как значение  $w_0(l)$  единственно. Оно монотонно растет от 0 до 1 с ростом параметра  $l$ . Вначале, когда  $l < 3$ , особой точкой является локальный максимум; при  $l = 3$  максимум и минимум совпадают, образуя точку перегиба. С дальнейшим ростом  $l$  особой точкой становится локальный минимум.

При  $l \leq 1$  отличный от нуля локальный минимум для поля  $f$  перестает существовать, так как потенциал  $V_{int}$  становится доминирующим (напомним, что значение  $w$  должно быть не меньше нуля, иначе оно скатится к абсолютному минимуму). Поэтому, особой точкой для поля  $f$  будет только нуль, но теперь он будет не локальным максимумом, а абсолютным минимумом. Так как при  $f = 0$  потенциал взаимодействия равен нулю, то эффективный потенциал для поля  $w$  не смещен. В результате, конфигурация составлена из минимума  $f$  и максимума  $w$ , как во втором случае. Но математически это состояние описывается формулой для первого случая.

## 4.2 Линеаризация и собственные значения

Рассмотрим уравнения движения  $\dot{X} = A(X)$  в окрестности особых точек  $X_0(l)$ , удовлетворяющих условию  $A(X_0) = 0$ . Пусть  $\delta X = X - X_0$ . Тогда линеаризованная система уравнений будет иметь вид:

$$\delta \dot{X} = \left. \frac{\partial A(X)}{\partial X} \right|_{X=X_0} \delta X, \quad (42)$$

или, в явном виде:

$$\begin{aligned} \delta \dot{Q} &= \delta P, \\ \delta \dot{P} &= M \delta Q, \end{aligned} \quad (43)$$

где матрица  $M$  получается дифференцированием уравнений движения и уравнения Фрийдмана по переменным  $Q = \{f, w, a\}$ . Для наших целей интересен явный вид  $M(l)$  для конкретных решений. Для (40) будем иметь

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3l(l-1)}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3l}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{2}, \end{pmatrix} \quad (44)$$

а для (41) получим

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3l^2(l-1)}{4(l+1)} & -\frac{3l\sqrt{l-1}}{4\sqrt{l+1}} & \frac{3l^2\sqrt{l-1}}{2\sqrt{2}(l+1)} \\ -\frac{6l\sqrt{l^2-1}}{(l+1)^2} & \frac{3l(3-l)}{2(l+1)} & -\frac{3\sqrt{2}l(l-1)}{2(l+1)^{3/2}} \\ \sqrt{-\frac{l-1}{2}} & \frac{\sqrt{2(l+1)(l-1)}}{4l} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Нахождение собственных значений и собственных векторов, удовлетворяющих уравнению  $\delta\dot{X} = \mu\delta X$ , сводится к решению системы

$$\begin{aligned} \mu\delta Q &= \delta P, \\ \mu\delta P &= M\delta Q. \end{aligned} \quad (46)$$

Нетривиальные решения существуют при выполнении равенства

$$\det(M - \mu^2\mathbb{I}) = 0. \quad (47)$$

Шесть собственных значений  $\mu_i$  разбиваются на три пары. Это является следствием инвариантности системы относительно обращения времени, когда собственные векторы  $\delta X_i(t)$  описывают приближение к особой точке, или удаление от нее по той же траектории. Матрица  $M_1$  имеет диагональный вид, так что решение для собственных значений очевидно. Собственное значение для скалярного поля  $\mu_f^2 = 3l(l-1)/8$ . При  $l > 1$  имеет место узел, при  $l < 1$  собственное значение становится чисто мнимым, и узел сменяется фокусом. Действительно, как было отмечено выше, локальный максимум потенциала превращается в глобальный минимум, когда  $l$  становится меньше единицы.

Собственное значение калибровочного поля  $\mu_w^2 = 3l/2$  всегда вещественное, что соответствует узлу. Действительно, эффективный потенциал для калибровочного поля совпадает с  $W$ , так что конфигурация по калибровочному полю находится на вершине потенциального барьера.

Собственное значение для масштабного фактора  $\mu_a^2 = l/2$  также всегда вещественно. На фазовом портрете этой особой точке соответствует узел, а в описываемой модели — расширение (или сжатие) вселенной.

Уравнение (47) кубическое по  $\mu^2$ , поэтому аналитическое решение легко получить по стандартным формулам. Однако для случая (41) зависимость  $\mu(l)$  оказывается слишком громоздкой, и мы ее не приводим. Проще построить численные решения. Один корень этого уравнения всегда вещественный, как и должно быть для кубического уравнения; он всегда отрицателен. Ему соответствует фокус. Два других корня являются комплексными на отрезке  $l \in [1, 8, 7, 5]$ . Реальные части их равны, а мнимые отличаются знаком. Тогда на фазовом портрете будут наблюдаться четыре спиральные орбиты, отличающиеся направлением движения (от фокуса к фокусу) и ориентацией (право/лево-винтовые). При  $1 < l < 1,8$  корни вещественные и положительные, а при  $l > 7,5$  — отрицательные. Первому случаю соответствуют узлы, а второму — эллиптические орбиты. Первый корень — фокус — соответствует скалярному полю, находящемуся в минимуме своего потенциала. А узел, сменяющийся фокусом, соответствует переходу  $w$  из локального максимума в минимум. Случай  $l = 1$  соответствует вырожденному узлу для скалярного поля  $f$ . Тогда квадратичные слагаемые потенциалов  $V$  и  $V_{int}$  сокращаются, и эффективный потенциал будет пропорционален  $f^4$ .

## 5. Численные решения

Как было указано выше, сильное энергетическое условие в рассматриваемой модели не выполняется, поэтому знак космологического ускорения  $\ddot{a}$  не является определенным. Это обусловлено присутствием инфляционного потенциалом поля Хиггса. Когда скалярное поле находится далеко от минимума  $V(f)$ , наблюдается инфляция. Если поле не находится в метастабильном состоянии  $f = 0$ , то оно неизбежно скатывается к минимуму. Возникающая кинетическая энергия в среднем равна потенциальной, но в уравнение для масштабного фактора (23) она дает в два раза больший вклад. В колебательном режиме с изменяющейся амплитудой  $f = \bar{f}(t) \exp(i\beta t)$  плотность энергии  $\rho = T + V$  не осциллирует, а изменяется пропорционально  $\bar{f}^2$ . Давление  $p = T - V$  осциллирует, но в среднем  $\langle \rho + 3p \rangle \sim \rho > 0$ . Поэтому, после начального периода ускоренного расширения неизбежно происходит “разворот” ( $\dot{a} = 0$ ,  $\ddot{a} < 0$ ), после которого система возвращается к состоянию, близкому к исходному. Заметим, что в районе разворота можно положить

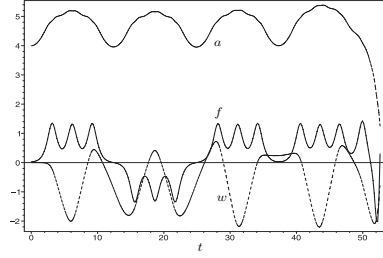


Рис. 1: Решение для масштабного фактора и полей описывает осциллирующую вселенную. Однако с течением времени накапливается расхождение фаз колебаний у скалярного и калибровочного поля, и на очередном этапе отскока не происходит: эволюция вселенной заканчивается космологической сингулярностью.

$\rho \approx \hat{\rho} = \text{const}$ , соответственно  $p \approx \hat{\rho} \cos \beta t$ . Тогда уравнение (23) для масштабного фактора принимает вид уравнения Матве. После существенной инфляции значение масштабного фактора становится достаточно большим, поэтому  $V \gg V_{int}$ , но  $V_{int} \gg W$ . Соответственно, в режиме дефляции скалярное поле осциллирует около значений  $\pm 1$ , а калибровочное поле — около вакуумного значения  $-1$ .

Численные решения обнаруживают хаотическое поведение в существенной области параметров. Оно характеризуется наличием разворотов, после которых система возвращается в состояние, близкое к начальному: график масштабного фактора напоминает арку. Но из-за наличия осцилляций в момент возврата масштабного фактора фаза осцилляций материальных полей может не совпасть с начальной. В результате возможны два варианта: возникновение космологической сингулярности, либо “отскок” ( $\dot{a} = 0$ ,  $\ddot{a} > 0$ ), за которым следует новый этап расширения-сжатия. Его период может повторять предыдущий, либо отличаться от него существенным образом. При варьировании начальных параметров наблюдается фрактальная структура решений.

Анализ и классификацию численных режимов целесообразно проводить с учетом свойств динамической системы, описанных в предыдущем разделе. Перечислим устойчивые режимы. Это движение в окрестности особых точек, являющихся фокусами: решение (41) при  $l > 3$ , и решение (40) при  $l < 1$ ; а также инфляция и дефляция.

Первый тип о решений, который мы хотим описать, это осциллирующая вселенная, характеризующаяся квазихаотическим чередованием

периодов инфляции и дефляции. Продолжительность таких периодов, в зависимости от параметров, может быть совершенно случайной величиной, либо с очень большой точностью одинаковой в течение длительной последовательности серии растяжений и сжатий.

На рис. 1 изображено решение для системы, начинающей свою эволюцию из окрестности особой точки (38). Параметр  $l > 1$ , поэтому точка  $f = 0$  является узлом. В окрестности этого локального максимума потенциала  $V$  наблюдается инфляция при уравнении состояния  $\rho = -p$ . Затем скалярное поле осциллирует вокруг фокусов  $f = \pm 1$ , при этом давление также осциллирует, и в среднем  $\langle p = 0 \rangle$ , что приводит к дефляции и сжатию (рис. 2). Такой цикл повторяется несколько раз. Но

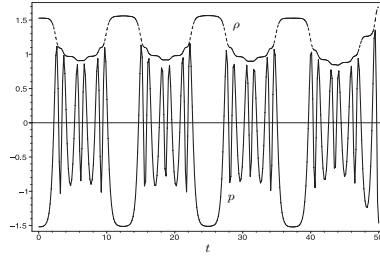


Рис. 2: В осциллирующей вселенной во время отскоков и разворотов плотность энергии  $\rho$  примерно постоянна, а во время расширения и сжатия достаточно быстро переходит от максимального к минимальному значению и обратно. Когда плотность энергии минимальна, давление  $p$  осциллирует, что характерно для модели со скалярным полем.

с каждым циклом начальное состояние воспроизводится все с меньшей точностью, что заметно на графике для калибровочного поля, колебания амплитуды которого очень велики. Масштабный фактор  $a$  испытывает серию отскоков и разворотов, затем наступает сингулярность.

Второе интересное решение начинает эволюцию из окрестности особой точки (41). Калибровочное и скалярное поля осциллируют с малой амплитудой около своих минимумов (рис. 3– 5), что позволяет классифицировать данное решение как метастабильное. Наличие потенциала взаимодействия  $V_{int}$  смещает минимумы так, что  $f_{min} \sim 0.9$ ,  $w_{min} \sim 0.85$ . Периоды расширения-сжатия очень малы, поэтому за один цикл накапливается лишь небольшая ошибка в воспроизведении начального состояния системы. В результате наблюдается достаточно продолжительный режим  $\langle p \rangle = - \langle \rho \rangle / 3$ ,  $\langle a \rangle = \text{const}$ , с частыми отскока-

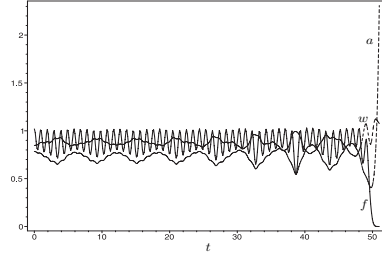


Рис. 3: Метастабильное состояние: на протяжении длительного периода времени амплитуды полей и величина масштабного фактора осциллируют в пределах малой области, однако эти колебания нелинейные.

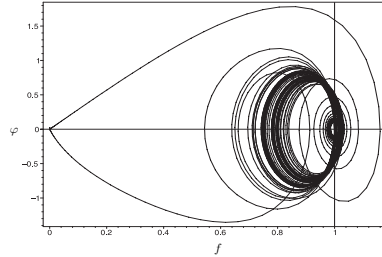


Рис. 4: Фазовая траектория скалярного поля в метастабильном состоянии описывает эллиптические орбиты вокруг смещающегося фокуса  $f < 1$ . После выхода из метастабильного состояния, наблюдается закручивающаяся спираль к фокусу  $f = 1$ , что соответствует расширению вселенной с замедлением. Переход между этими состояниями осуществляется через узел  $f = 0$ , что вызывает промежуточный этап ускоренного расширения.

ми и разворотами. Через какое-то время (для решения, приведенного на рис. 3,  $t = 50$ ) система переходит в режим сильнейшей инфляции:  $p = -\rho = \text{const}$  в течение заметного времени. Масштабный фактор за этот период увеличивается на несколько порядков. Потенциал взаимодействия  $V_{int} \sim a^{-2} \ll V$ , поэтому  $f$  скатывается к ближайшему минимуму  $V$ , равному единице. Но  $V_{int} \gg W \sim a^{-4}$ , поэтому  $w$  переходит к колебаниям около минимума  $V_{int}$ , равного  $-1$ . На графиках фазовых траекторий (рис. 3, 5) точки  $1$  и  $-1$  являются фокусами для скалярного и калибровочного полей, соответственно. Когда поля попадают в окрестности этих точек, начинается долгий период дефляции, так как опять давление осциллирует и в среднем равно нулю.

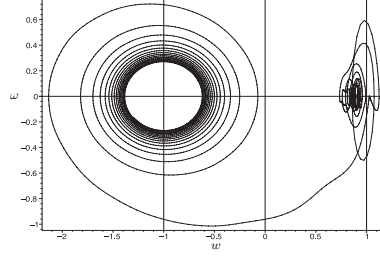


Рис. 5: Фазовая траектория калибровочного поля в метастабильном состоянии описывает эллиптические орбиты вокруг фокуса  $w = 1$ . При выходе из метастабильного состояния амплитуда калибровочного поля испытывает переход к осцилляциям около соседнего вакуумного состояния  $w = -1$ .

Теперь рассмотрим эволюцию вселенной, приводящую к нетривиальной эволюции потенциала скалярного поля: нарушающий симметрию потенциал Хиггса будет “включаться” и “выключаться” с течением времени. Напомним, что для семейства особых точек (41) если,  $w$  имеет минимум при  $l > 3$ , а при  $1 < l < 3$  — максимум; при этом  $f$  находится в минимуме. Другое семейство особых точек (38) характеризуется тем, что  $f$  имеет максимум при  $l > 1$ , а при  $0 < l < 1$  — минимум;  $w$  находится в максимуме.

Продemonстрируем решение (рис. 6–8), которое проходит через окрестности обеих семейств особых точек при малом значении  $l$ . Вна-

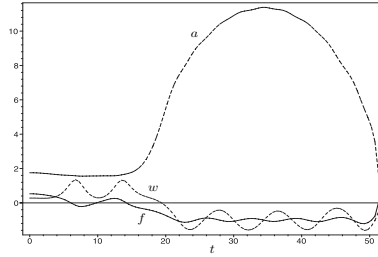


Рис. 6: Решение для масштабного фактора и полей в системе с эволюционирующим эффективным потенциалом скалярного поля.

чале система при  $l = 1.6$  задана в окрестности  $f = f_{min}$ ,  $w = w_{max}$ , что соответствует случаю (41). Затем калибровочное поле падает к правому минимуму около единицы, в результате чего взаимодействие между



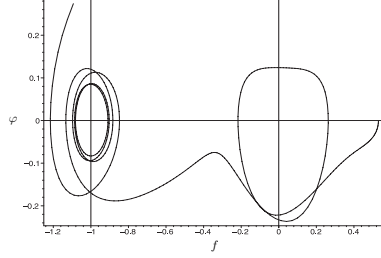


Рис. 7: Фазовая траектория скалярного поля описывает подъем из минимума  $0 < f < 1$  в минимум  $f = 0$ . Затем, по мере расширения, точка  $f = 0$  становится максимумом, что запускает ускоренное расширение, а скалярное поле скатывается к минимуму  $f = -1$ .

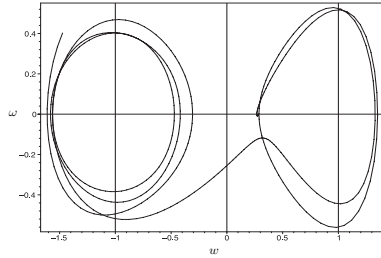


Рис. 8: Фазовая траектория калибровочного поля из максимума  $0 < w < 1$  скатывается в минимум  $w \rightarrow 1$ , что порождает восстановление симметрии в эффективном потенциале для скалярного поля, когда точка  $f = 0$  становится фокусом. По мере расширения локальный максимум  $0 < w < 1$  опускается все ниже, и калибровочное поле преодолевает этот “потенциальный барьер”, скатываясь к минимуму  $w = -1$ .

полями возрастает и вклад  $V_{int}$  в эффективный потенциал скалярного поля становится преобладающим. Нарушенная симметрия для скалярного поля восстанавливается, так как теперь  $f_{min} = 0$ , что соответствует особой точке (38) при  $l < 1$ . Потенциал Хиггса заменяется положительно определенным эффективным потенциалом  $V_{eff} \sim f^2$ . При этом  $\langle f \rangle = 0$ , что вызывает ускоренное расширение. В свою очередь, рост масштабного фактора приводит к модификации эффективного потенциала калибровочного поля:  $W_{eff} \rightarrow (w + 1)^2$ . Оно скатывается к  $w_{min} = -1$ , это выключает взаимодействие полей, и потенциал скалярного поля вновь восстанавливает свой хиггсовский вид. Опять проис-

ходит нарушение симметрии вакуумного состояния:  $f_{min} = -1$ . Масштабный фактор при этом испытывает разворот и наступает сжатие вселенной.

Для системы с  $j \neq 0$  наблюдаются аналогичные решения типа циклической эволюции и метастабильного состояния. Только теперь скалярное поле не может перейти через нуль, поэтому режим эволюции эффективного потенциала скалярного поля не реализуем. Ускоренное расширение возможно лишь при  $w$ , находящимся в окрестности  $-1$ .

## 6. Заключение

В этой работе была рассмотрена однородная и изотропная космологическая модель с материей, представляющей собой связанную систему  $SU(2)$  поля Янга-Миллса и комплексного хиггсовского дублета. Такую структуру имеет электрослабый сектор стандартной модели, поэтому изучение возможности ее использования для объяснения инфляции и темной энергии представляет интерес. Триплет векторных полей, взаимодействующих со скалярным дублетом, представляет собой нетривиальную систему, допускающую однородные и изотропные конфигурации, параметризуемые двумя скалярными полями. Самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса-Хиггса сводится к динамической системе шестого порядка, которая была исследована методами качественного анализа и численно. Модель имеет разнообразные режимы, от толменовского, характерного для чистого поля Янга-Миллса, до инфляционного, связанного с наличием скалярного потенциала Хиггса. Пространство решений имеет как хаотические области с фрактальной структурой, так и области регулярной эволюции. Типично возникновение конечных интервалов инфляционного раздувания, а также существование отскоков. Эти особенности представляются привлекательными для дальнейшего анализа реалистических космологических приложений.

Работа проводилась при поддержке РФФИ, проект 08-02-01398-а.

## Список литературы

- [1] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981);  
 A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982);  
 A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).

- [2] W. H. Kinney, arXiv:0902.1529 [astro-ph.CO];  
D. Baumann and H. V. Peiris, arXiv:0810.3022 [astro-ph];  
A. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008) [arXiv:0705.0164 [hep-th]];  
E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,”  
Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006) [arXiv:hep-th/0603057];  
M. Trodden and S. M. Carroll, arXiv:astro-ph/0401547.
- [3] D. V. Galtsov and M. S. Volkov, “Yang-Mills cosmology: Cold matter  
for a hot universe,” Phys. Lett. B **256**, 17 (1991);  
J. Cervero and L. Jacobs, “Classical Yang-Mills fields in a Robertson-  
Walker Universe,” Phys. Lett. B **78**, 427 (1978);  
M. Henneaux, “Remarks on space-time symmetries and nonabelian  
gauge fields,” J. Math. Phys. **23**, 830 (1982);  
Y. Hosotani, “Exact solution to the Einstein Yang-Mills equation,”  
Phys. Lett. B **147**, 44 (1984).
- [4] L. H. Ford, “Inflation driven by a vector field,” Phys. Rev. D **40**, 967  
(1989).
- [5] C. Armendariz-Picon, “Could dark energy be vector-like?,” JCAP  
**0407**, 007 (2004) [arXiv:astro-ph/0405267];  
V. V. Kiselev, “Vector field as a quintessence partner,” Class. Quant.  
Grav. **21**, 3323 (2004) [arXiv:gr-qc/0402095];  
H. Wei and R. G. Cai, “Interacting vector-like dark energy, the first  
and second cosmological Phys. Rev. D **73**, 083002 (2006) [arXiv:astro-  
ph/0603052];  
J. B. Jimenez and A. L. Maroto, “A cosmic vector for dark energy,”  
arXiv:0801.1486 [astro-ph].
- [6] V. V. Dyadichev, D. V. Gal'tsov, A. G. Zorin and M. Y. Zotov, “Non-  
Abelian Born-Infeld cosmology,” Phys. Rev. D **65**, 084007 (2002)  
[arXiv:hep-th/0111099];  
A. Fuzfa and J. M. Alimi, “Dark energy as a Born-Infeld gauge  
interaction violating the equivalence Phys. Rev. Lett. **97**, 061301 (2006)  
[arXiv:astro-ph/0604517].
- [7] W. Zhao and Y. Zhang, “The state equation of the Yang-Mills field  
dark energy models,” Class. Quant. Grav. **23**, 3405 (2006) [arXiv:astro-  
ph/0510356];  
W. Zhao, D. Xu, “Evolution of magnetic component in Yang-Mills  
condensate dark energy Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1735 (2007) [arXiv:gr-  
qc/0701136];

- K. Bamba, S. Nojiri and S.D. Odintsov, “Inflationary cosmology and the late-time accelerated expansion of the arXiv:0803.3384 [hep-th];  
D.V. Gal'tsov, “Non-Abelian condensates as alternative for dark energy,” arXiv:0901.0115 [gr-qc].
- [8] P. V. Moniz and J.M. Mourao, “Homogeneous and isotropic closed cosmologies with a gauge sector,” *Class. Quant. Grav.* **8**, 1815 (1991);  
O. Bertolami and P. V. Moniz, “Decoherence of Friedmann-Robertson-Walker geometries in the presence of Nucl. Phys. B **439**, 259 (1995) [arXiv:gr-qc/9410027];  
P. V. Moniz, J. M. Mourao and P. M. Sa, “The Dynamics Of A Flat Friedmann-Robertson-Walker Inflationary Model In The *Class. Quant. Grav.* **10**, 517 (1993).
- [9] H. P. Kuenzle, *Class. Quant. Grav.* **8**, 2283 (1991);  
B.K. Darian and H.P. Kunzle, “Cosmological Einstein-Yang-Mills equations”
- [10] O. Bertolami and J.M. Mourao, “Euclideanized Einstein Yang-Mills Equations, Wormholes And The Ground State *In Lisbon 1990, Proceedings, The physical universe\* 21-38 (QB981:A9:1990)*;  
O. Bertolami, J. M. Mourao, R. F. Picken and I. P. Volobuev, “Dynamics of euclidenized Einstein Yang-Mills systems with arbitrary gauge *Int. J. Mod. Phys. A* **6**, 4149 (1991);  
M. Cavaglia and V. de Alfaro, “On a quantum universe filled with Yang-Mills radiation,” *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 569 (1994) [arXiv:gr-qc/9310001];  
M. Cavaglia, V. De Alfaro and A.T. Filippov, “Quantization of the Robertson-Walker Universe,” *in Proc. Quantum Systems: New Trends And Methods (QS 94) 23-29 May 1994, Minsk, Belarus, pp. 31-46 J. Math. Phys.* **38**, 4696 (1997) [arXiv:gr-qc/9610026].
- [11] E. E. Donets and D. V. Galtsov, “Continuous family of Einstein Yang-Mills wormholes,” *Phys. Lett. B* **294**, 44 (1992) [arXiv:gr-qc/9209008];  
E. E. Donets and D.V. Galtsov, “Wormhole solutions in coupled Einstein Yang-Mills axion system,” *In \*Evora 1992, Proceedings, Classical and quantum gravity\* 289-292.*
- [12] A. Fuzfa, *Class. Quant. Grav.* **20**, 4753 (2003) [arXiv:gr-qc/0310032].
- [13] M.S. Volkov and D.V. Gal'tsov, “Gravitating non-Abelian solitons and black holes with Yang-Mills fields,” *Phys. Rept.* **319**, 1 (1999) [arXiv:hep-th/9810070].

# СПЕКТР-УФ: Новые перспективные задачи в области космологии и физики звезд

Ю. Н. Гнедин\* и М. Ю. Пиотрович

*Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,  
Санкт-Петербург, Россия*

В статье представлен обзор некоторых новых задач в области космологии и физики звезд в свете перспектив предстоящего запуска космической обсерватории СПЕКТР-УФ. В статье обсуждаются следующие три новые задачи. Наблюдения спектра УФ излучения далеких  $z > 6$  квазаров позволят получить информацию о мягком  $< 0.5$  КэВ рентгеновском излучении аккреционного диска вокруг сверхмассивной черной дыры (в результате космологического красного смещения). Эта область рентгеновского излучения пока слабо изучена современными рентгеновскими обсерваториями. В результате будет получена ценная информация об области вторичной ионизации Вселенной. Астрономы Южной Европейской Обсерватории обнаружили эффект ориентации электрических векторов излучения квазаров с оптической поляризацией. Один из возможных физических механизмов такого эффекта – магнитная конверсия излучения квазаров в маломассивные аксионы, предсказываемые новой суперсимметричной теорией элементарных частиц, во внегалактическом магнитном поле. Поскольку вероятность такой конверсии сильно растет с ростом энергии следует ожидать эффективной корреляции между особенностями в спектральном УФ распределении энергии квазаров и основными поляриметрическими характеристиками в оптическом диапазоне. В результате откроется новое направление в современной физике. В области физики звезд большой интерес представляют УФ наблюдения рентгеновских источников со сверхкритической светимостью. Результаты УФ наблюдений данных рентгеновских источников позволят ответить на вопрос, являются ли эти источники аккрецирующими черными дырами промежуточной массы.

---

\*E-mail: gnedin@gao.spb.ru

## 1. Введение

“Спектр-УФ” – “Всемирная Космическая Обсерватория” (ВКО-УФ) представляет собой крупный международный проект новой космической обсерватории, предназначенной для исследования Вселенной в ультрафиолетовом (УФ) спектральном диапазоне электромагнитного спектра излучения. Набор научных приборов этой обсерватории позволит обеспечить решение широкого класса наблюдательных задач. Очень важно, что обсерватория будет осуществлять наблюдения в недоступном для земных инструментов ультрафиолетовом участке электромагнитного спектра:  $100 \div 320$  нм. В данной работе будут представлены три наблюдательных программы, которые могут быть успешно осуществлены в рамках данного космического проекта. Первая из них представляет наблюдения квазаров на больших космологических расстояниях  $z = 5 \div 6$ , открытых недавно в глубоких обзорах [1-4]. Ультрафиолетовое излучение в диапазоне  $100 \div 320$  нм соответствует излучению в мягком, меньшем 0.5 КэВ, рентгеновском диапазоне в собственной системе координат, связанной с далекими квазарами. Именно этот диапазон трудно доступен для непосредственных наблюдений квазаров в близкой Вселенной вследствие поглощения. Исследование таких квазаров очень важно для понимания природы зоны вторичной ионизации, возникающей именно в области красных смещений  $z \sim 6$ , и происходящих в ней физических процессов. Вторая программа связана с областью исследований, лежащих на стыке космологии и физики элементарных частиц. Речь идет об исследовании физических процессов, происходящих в межгалактическом магнитном поле с участием ультрафиолетовых фотонов. Одним из самых интригующих недавних астрономических открытий является обнаружение космологической ориентации электрических векторов поляризации оптического излучения далеких квазаров [5,6]. Одним из наиболее привлекательных объяснений данного явления является механизм превращения фотонов в псевдоскалярные частицы в присутствии внешнего магнитного поля. Такие частицы предсказываются новой, успешно развивающейся, суперсимметричной теорией элементарных частиц. Вероятность такого процесса увеличивается с ростом энергии фотонов и, в частности, может быть довольно значительной именно в ультрафиолетовом диапазоне. Поэтому наблюдения квазаров с сильно поляризованным излучением именно в УФ диапазоне позволит получить ценную информацию именно о данном процессе, который может играть важную роль в физике элементарных

частиц. Наконец, третий раздел данной работы связан с обоснованием необходимости наблюдений в УФ диапазоне рентгеновских источников, обладающих сверхэддингтоновской светимостью, природа которых до сих пор не определена. Вполне возможно, что результаты наблюдений таких источников в УФ диапазоне позволят открыть черные дыры промежуточных масс, которые рассматриваются как возможные кандидаты для объяснения природы таких источников.

## 2. Квазары на больших космологических расстояниях: перспективы наблюдений в ультрафиолетовом спектральном диапазоне

Хорошо известно, что квазары проявляют себя в результате аккреции газа на сверхмассивные черные дыры. Общепринятая точка зрения заключается в том, что именно сверхмассивные черные дыры с массами  $10^6 \div 10^9$  Масс Солнца находятся в центральных областях квазаров и активных ядер галактик.

В настоящее время рекордные значения космологических красных смещений составляют для квазаров  $z = 6.4$ , для галактик  $z > 7.0$ , и для космических гамма-всплесков  $z > 6.3$ . В последнее время появились научные сообщения об открытии в результате глубоких обзоров на Космическом телескопе им.Хаббла (HST) и больших 8 ÷ 10-м телескопах галактик и квазаров в области исключительно больших красных смещениях  $z \sim 7 \div 10$  ([2]). Данные наблюдений включают: космологическое смещение, показатели степенного спектра излучения данных квазаров, значения масс квазаров, болометрические светимости, а также отношения болометрических светимостей к эддингтоновской светимости. Эти объекты характеризуются значительными значениями их масс  $M = 10^9 \div 10^{10}$  масс Солнца и высокими значениями отношения болометрической светимости к эддингтоновскому значению. Именно эти объекты следует считать перспективными кандидатами для наблюдений на космической обсерватории СПЕКТР-УФ.

Излучение, которое будет регистрироваться данной Обсерваторией, в системе покоя соответствует ультрамягкому рентгеновскому и крайнему ультрафиолетовому электромагнитным спектральным диапазонам. В локальной Вселенной такое излучение эффективно поглощается в мо-

лекулярном торе, окружающим сверхмассивную черную дыру в активной галактике. Существует интересная проблема, есть ли зависимость мощности молекулярных торов от космологического красного смещения. На английском языке, эта проблема получила название “Ubiquity”, т.е. вездесущность или повсеместность. Поэтому, практически, любой результат, который будет получен на Обсерватории, имеет большое значение. Например, получение только верхних пределов докажет, что молекулярные торы, окружающие сверхмассивные черные дыры, образуются на поздних стадиях эволюции Вселенной.

Другой результат, который может быть получен в рамках программы СПЕКТР-УФ, связан с исследованием магнитных полей квазаров на больших космологических расстояниях. Величина магнитного поля на радиусе горизонта сверхмассивной черной дыры определяется, как правило, на основе равенства плотностей энергий аккреционного потока и магнитного поля и может составлять  $10^4 \div 10^5$  Гаусс. Такое магнитное поле возникает в результате взаимодействия вращающейся черной дыры с аккреционным диском. Жесткое электромагнитное излучение в данном случае возникает в результате синхротронного излучения релятивистских электронов с последующим переводом этого излучения в более жесткий диапазон вследствие обратного эффекта Комптона (Self-Compton process).

### **3. Исследование фонового ультрафиолетового излучения: поиск УФ фотонов вследствие распада и конверсии аксионов в космическом магнитном поле**

Аксионы – наиболее популярные кандидаты в темную материю. Несмотря на слабость связи аксионов с другими видами материи, включая электромагнитное излучение, существует два наиболее вероятных канала связи аксионного поля с электромагнитным полем (Рис.1): распад аксиона на два фотона и конверсия аксиона в фотон (и обратный процесс) во внешнем магнитном поле.

На Рис.2 представлена спектральная зависимость наблюдаемого фонового излучения Вселенной. Ультрафиолетовая часть спектра наименее исследована. В настоящее время ведутся исследования с целью поиска в фоновом спектре фотонов, возникающих в результате распада



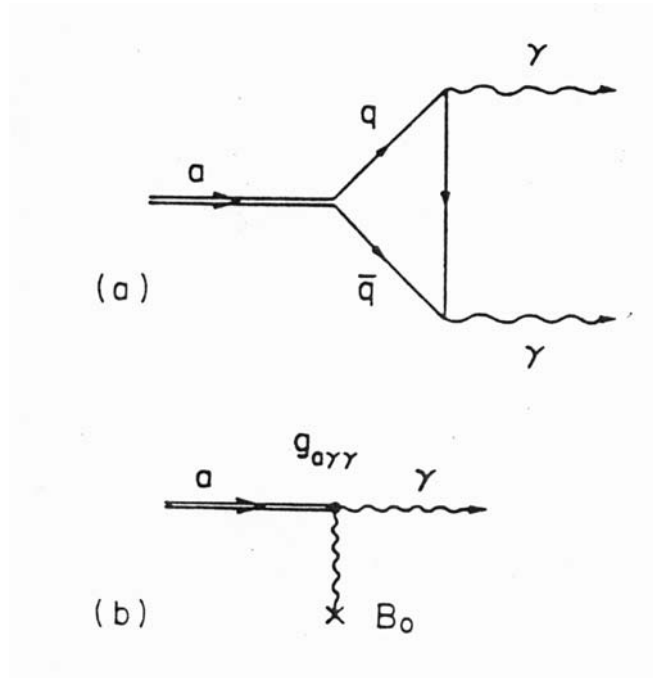


Рис. 1: (а) Диаграмма распада аксиона на два фотона, (б) превращение аксиона в фотон во внегалактическом магнитном поле.

да частиц, принадлежащих темной материи Вселенной. Так, распад и аннигиляция массивных частиц – вимпов, вносит вклад в фоновое электромагнитное излучение в жестком гамма-диапазоне. Поиск такого излучения ведется на многих международных установках и космических обсерваториях. В УФ диапазоне, часть фонового излучения может быть обусловлена распадом аксионов и также их трансформацией в фотоны во внегалактическом магнитном поле. Таким образом, распад и трансформация аксионов с энергией массы покоя в несколько электронвольт генерирует фотоны именно ультрафиолетового диапазона. На Рис.3 представлено сравнение наблюдаемого спектра фонового излучения Вселенной с ожидаемым вкладом от распада аксионов. Такое сравнение показывает, что требуются дополнительные наблюдения именно в ультрафиолетовом диапазоне для выделения искомого вклада

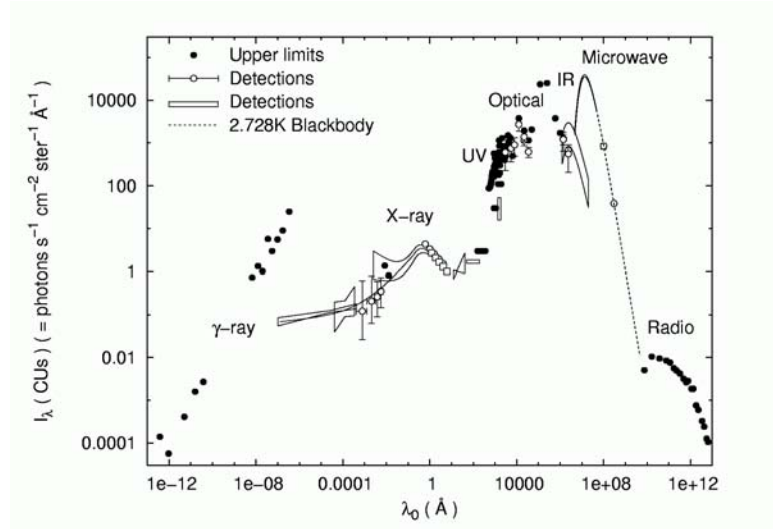


Рис. 2: Спектр фонового излучения Вселенной.

от распада частиц темной материи (аксионов).

#### 4. Шкала переменности активных галактических ядер в ультрафиолетовом диапазоне

Многие активные галактические ядра проявляют переменность своего электромагнитного излучения. Как правило, шкала переменности в ультрафиолетовом диапазоне короче, чем в оптическом (см., например, [7]). Одним из возможных механизмов такой переменности может являться известный механизм магнитного пересоединения и аннигиляции магнитных силовых линий. Характерное время такого процесса оценивается как  $\Delta t = R_\lambda / V_{rec}$ , где  $R_\lambda$  – масштабный размер аккреционного диска, соответствующий длине волны излучения  $\lambda$ , и  $V_{rec}$  – скорость пересоединения магнитных силовых линий. Характерный масштаб аккреционного диска был вычислен в работе [8]:

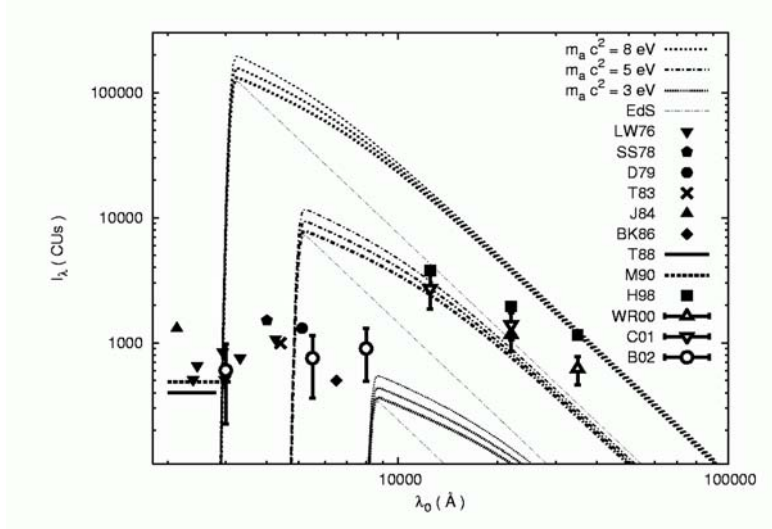


Рис. 3: Сравнение фонового спектра с теоретическими расчетами по превращению аксионов в фотоны.

$$R_\lambda = 0.95 \times 10^{10} \lambda_{rest}^{4/3} (M_{BH}/M_\odot)^{2/3} \left( \frac{L_{bol}}{\varepsilon L_{Edd}} \right)^{1/3} \quad (1)$$

где  $M_{BH}$  и  $L_{bol}$  – масса и болометрическая светимость сверхмассивной черной дыры, а  $\varepsilon$  – коэффициент трансформации аккреционной энергии в излучение.

Соотношение между характерными временами переменности в УФ и в видимом диапазонах имеет вид:

$$\frac{\Delta t(UV)}{\Delta t(Opt)} = \left( \frac{\lambda_{rest}(UV)}{\lambda_{rest}(Opt)} \right)^{4/3} \frac{V_{rec}(Opt)}{V_{rec}(UV)} \quad (2)$$

Любопытно, если принять, что скорость пересоединения пропорциональна альвеновской скорости  $V_A$  и для расчета последней использовать стандартную модель аккреционного диска, то получим, что характерное время переменности прямо пропорционально длине волны  $\lambda$ . Именно такая зависимость и реализуется в случае активного галактического ядра в NGC4151.

Согласно (2), измеренные одновременно в УФ и оптическом диапазоне характерные времена переменности позволяют, в принципе, измерить магнитное поле в аккреционном диске и, более того, определить его топологию.

## 5. Рентгеновские источники со сверхэддингтоновской светимостью

В последнее время обнаружен ряд рентгеновских источников с экстремальной (сверхэддингтоновской) светимостью, если считать их черными дырами звездных масс. Именно поэтому рассматривается другая возможность их природы как черных дыр промежуточных масс. В этом случае снимается проблема их экстремальной светимости.

Существенным элементом, характеризующим эти источники, является слишком большое отношение рентгеновского потока к оптическому потоку:  $F_X/F_{Opt} \sim 150 \div 2500$ . Этот факт существенно затрудняет оптическое отождествление этих источников. Между тем, в УФ области спектр соотношения потоков совсем другое. Если рассчитать это соотношение в рамках стандартной модели аккреционного диска, то получим  $F_X/F_{UV} \sim 10$ . Это позволяет на более успешное отождествление этих источников именно в УФ диапазоне спектра. Кроме того, для черных дыр промежуточных масс это соотношение может оказаться  $\sim 1$ , что станет решающим фактором обнаружения таких объектов. Также важной представляется задача установление шкалы переменности этих источников в УФ диапазоне и сравнение такой шкалы с соответствующими данными, получаемыми в рентгеновском и оптическом диапазонах. Такое сравнение позволит получить много ценной информации об особенностях аккреционных потоков в этих объектах.

## 6. Заключение

Перечисленные задачи не исчерпывают возможностей замечательной обсерватории ВКО-Спектр-УФ. Такая многоцелевая космическая обсерватория несомненно обеспечит прорыв в наших знаниях о Вселенной в целом и ее отдельных объектах. Можно надеяться на широкую поддержку проекта российской астрономической общественностью.

Авторы статьи благодарят за поддержку Программу Президиума РАН “Эволюция звезд и галактик”, Программу ОФН РАН “Протяженные объекты во Вселенной”, РФФИ (грант № 07-02-00535а), грант Президента Российской Федерации “Ведущая Научная Школа” (НШ-6110.2008.2).

М.Ю. Пиотрович также был поддержан Грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-4101.2008.2).

## Список литературы

- [1] X. Fan et al. *AJ* **125**, 1649 (2003).
- [2] L. Jiang et al. *AJ* **132**, 2127 (2006).
- [3] R. Wang et al., arXiv:0806.3028 (2008).
- [4] C. J. Willot et al. *AJ* **134**, 2435 (2007).
- [5] D. Hutsemekers et al. *Astron. Astrophys.* **441**, 915 (2005).
- [6] D. Sluse et al. *Astron. Astrophys.* **443**, 757 (2005).
- [7] В.М. Люты́й. *Письма в АЖ* **31**, 723 (2005).
- [8] S. Poindexter et al., arXiv:0707.0003 (2007).

# Осциллятор Фибоначчи

Е. В. Дамаскинский<sup>a\*</sup> и В. В. Борзов<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Кафедра математики, Военный инженерный технический университет (ВИТУ)*

<sup>b</sup> *Кафедра математики, Санкт-Петербургский университет телекоммуникаций (СПбУТ)*

В первой части данной работы будут приведены некоторые результаты связанные с числами Фибоначчи, многочленами Фибоначчи и их некоторыми обобщениями и применениями. Во второй части мы обсудим связь чисел Фибоначчи с различными вариантами алгебр деформированных осцилляторов и опишем построение осциллятора Фибоначчи, порождаемого полиномами Фибоначчи, развитым авторами методом построения осциллятороподобных систем, связанных с заданным семейством ортогональных многочленов<sup>†</sup>.

*Нашему другу Андрею Грибу  
в связи с 70-летием*

## 1. Числа Фибоначчи, многочлены Фибоначчи, их некоторые обобщения и применения

В 1202 г. итальянский купец и математик Леонардо Пизанский (1180-1240), известный как Фибоначчи, опубликовал сочинение "Liber Abaca". В этом произведении были собраны почти все математические сведения, известные к этому времени. В частности из этого труда европейские математики, использующие латинский вариант счисления, узнали об арабском (десятичном) счислении, что значительно упростило арифметические вычисления. Среди множества задач, приведенных в этой книге, была, получившая широкую известность, "задача о кроликах"<sup>‡</sup> решение

---

\*E-mail: evd@pdmi.ras.ru

<sup>†</sup> Данное исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ 09-01-00504-а

<sup>‡</sup> Некоторые разновидности этой задачи, например, задача о смертных кроликах обсуждается в [4, 5]

которой дает последовательность чисел, известная как ряд Фибоначчи:  $F_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$   $n = 0, 1, 2, \dots$ . Элементы этой последовательности (числа Фибоначчи) определяются рекуррентным соотношением  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  с начальными условиями  $F_0 = 1, F_1 = 1$  ( $n \geq 2$ ).<sup>§</sup> Известно, что характеристическое уравнение, возникающее при решении этого рекуррентного соотношения, имеет вид  $k^2 = 1 + k$ .

Используя корни  $k_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $k_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  этого уравнения можно представить числа Фибоначчи в виде  $F_n = (\alpha^n - \beta^n) / \sqrt{5}$ . Эта формула, известная как формула Бине, примечательна тем, что она дает выражение целого числа (числа Фибоначчи) в виде линейной комбинации иррациональных чисел. Приведенное выше квадратное уравнение возникает также при делении отрезка единичной длины на две части длины  $x$  и  $1 - x$  в "среднем и крайнем отношении" так, что  $1/x = x/(1 - x)$ . Такое соотношение частей считается эстетически привлекательным и указанное разбиение называется "золотым отношением," а число  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , дающее решение этого уравнения - "золотым сечением". Золотое сечение часто используется в архитектуре (улица зодчего Росси в Петербурге), в полиграфии (высота и ширина книги стандартного размера) и в прикладном искусстве (размеры стандартного спичечного коробка). В частности золотое сечение и числа Фибоначчи лежат в основе индийской музыкальной шкалы [6].

До конца прошлого столетия числа Фибоначчи использовались преимущественно в теории чисел и ряде других специальных разделов математики [7]. Резкое возрастание интереса к числам Фибоначчи и их аналогам в конце 20-го века было обусловлено, по всей видимости, двумя причинами.

**Во первых**, в связи с развитием информационных технологий усилился интерес к задачам кодирования информации, криптографии и компьютерной безопасности. В частности исследовалась возможность использования в программировании систем счисления отличных от двоичной. Основой для этого служит созданная в работе Дж. Бергмана [8] позиционная система счисления с иррациональной базой. В этой работе была доказана возможность представления действительного числа  $A$  в виде  $A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \alpha^n$ , аналогично его представлению в десятичной  $A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n 10^n$  или двоичной  $A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n 2^n$  системе. В соотношении  $A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \alpha^n$ ,  $a_i$ - произвольное двоичное число (т.е. либо 0, либо 1),

<sup>§</sup>Простейшие свойства чисел Фибоначчи изложены в известной брошюре Н. Н. Воробьева [1] (см. также [2, 3]).

а  $\alpha$  золотое сечение. Из формулы Бине следует, что  $\alpha^n$  можно записать в виде  $\alpha^n = \frac{1}{2}(L_n + F_n\sqrt{5})$ , где  $L_n$  последовательность чисел Люка  $L_n: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$  которые определяются тем же рекуррентным соотношением  $L_{n+1} = L_{n-1} + L_n$ , что и числа Фибоначчи  $F_n$ , но с другими начальными условиями  $L_1 = 1, L_2 = 3$ . Числа Люка связаны с числами Фибоначчи соотношениями  $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ .

Известно, что  $F_n$  и  $L_n$  связаны с многочленами Чебышева 1-го и 2-го рода

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

соотношением [9, 10, 11]

$$F_{n+1} = (-i)^n U_n(i \sinh(\theta_0)), \quad L_{n+1} = 2(-i)^n T_n(i \sinh(\theta_0)),$$

где  $\theta_0 > 0$  и  $\sinh(\theta_0) = \frac{1}{2}$ .

**Во вторых**, экспериментальное обнаружение [12] в 1984 году квазикристаллических структур [13, 14, 15] и построение искусственных многослойных структур эпитаксией молекулярных пучков [16] стимулировало активное теоретическое изучение квазипериодических структур, простейшей из которых являются квантовые цепочки Фибоначчи. В самом простом случае гамильтониан Фибоначчи имеет вид

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + \lambda\theta(n)\psi(n),$$

где  $\theta(n) = [n\beta] - [(n+1)\beta]$  ( $[x]$  - обозначает целую часть числа  $x$ );  $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ -константа связи, а  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -\alpha^{-1}$  - дуальное золотое сечение. Спектр этого гамильтониана при любом  $\lambda \neq 0$  представляет собой канторово множество нулевой меры Лебега (даже если  $\beta$  произвольное иррациональное число) и является сингулярно непрерывным [17, 18, 19]. Эти работы породили обширную область исследований квазикристаллических структур в физике и квазипериодических операторов в математической физике, активно развивающуюся и в настоящее время. Наличие структур, связанных с числами Фибоначчи и родственными целочисленными последовательностями было обнаружено и в других областях знаний: теория полупроводников [20]; космология [21]; физика высоких энергий [22]; биология [23, 24]; техника [25].

Хорошо изучены полиномы Фибоначчи  $P_n^F(x)$  и Люка  $P_n^L(x)$ , связанные с числами Фибоначчи и Люка. Эти многочлены можно определить



рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} P_{n+1}^F(x) &= xP_n^F(x) + P_{n-1}^F(x), & P_0^F(x) &= 0 & P_1^F(x) &= 1; \\ P_{n+1}^L(x) &= xP_n^L(x) + P_{n-1}^L(x), & P_0^L(x) &= 2 & P_1^L(x) &= x, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$P_{n+1}^F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-2k-1}, \quad n \geq 1;$$

$$P_{n+1}^L(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad n \geq 1.$$

Эти многочлены связаны соотношениями

$$P_n^L(x) = P_{n+1}^F(x) + P_{n-1}^F(x), \quad \frac{d}{dx} P_n^L(x) = nP_n^F(x).$$

## 2. Осциллятор Фибоначчи

Существует много вариантов обобщения чисел Фибоначчи. Наиболее естественные из них определяются соотношением

$$\mathfrak{F}_{n+1}^{a,b} = a\mathfrak{F}_n^{a,b} + b\mathfrak{F}_{n-1}^{a,b}.$$

Этому соотношению удовлетворяют в частности базисные числа, связанные с различными вариантами деформированных осцилляторов. Приведем некоторые из этих деформаций.

1) Осциллятор Арика-Куна [26] (исторически первый вариант  $q$ -осциллятора) определяется с использованием так называемого "математического" (или "гауссова") базисного числа  $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ , удовлетворяющего соотношению

$$[n+1]_q = (q+1)[n]_q - [n-1]_q, \quad [0]_q = 0, \quad [1]_q = 1.$$

2) Деформированный осциллятор, связанный с квантовыми группами, использует "физическое" базисное число  $[n; q] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ , для которого выполнено соотношение

$$[n+1; q] = (q + q^{-1})[n; q] - [n-1; q], \quad [0; q] = 0, \quad [1; q] = 1.$$

3)  $(p; q)$ -осциллятор (или двухпараметрический деформированный осциллятор), [30], связан с базисным числом  $[n; q, p] = \frac{q^n - p^{-n}}{q - p^{-1}}$ , которое также удовлетворяет обобщенному варианту рекуррентного соотношения Фибоначчи

$$[n+1; q, p] = (q+p)^{-1}[n; q, p] - qp^{-1}[n-1; q, p], \quad [0; p, q] = 0, \quad [1; p, q] = 1.$$

Простейший вариант определяется соотношением

$$\mathcal{F}_{n+2}^q = \mathcal{F}_n^q + q\mathcal{F}_{n+1}^q, \quad \mathcal{F}_0^q = 1, \quad \mathcal{F}_1^q = q,$$

которое задает последовательность

$$\mathcal{F}_n(q) : \quad 1, q, (q^2 + 1), (q^4 + 3q^2 + 1), \dots$$

Этот  $q$ -аналог чисел Фибоначчи был использован при описании статистики димеров на неориентированной поверхности [31].

Используя связь чисел Фибоначчи и Люка с полиномами Чебышева, Исмаил [9] предложил их одно-параметрическое обобщение

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\theta) &= (-i)^n U_n(\sinh(i\theta)), & F_n(\theta) &= e^{(n-1)\theta} \frac{1 - Q^n}{1 - Q}, \\ L_{n+1}(\theta) &= 2(-i)^n T_n(\cos(i\theta - \pi/2)), & L_n(\theta) &= e^{n\theta} [1 + Q^n], \end{aligned}$$

где  $Q = -e^{-2\theta}$ . Эти обобщения удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$y_{n+1}(\theta) = 2 \sinh \theta y_n(\theta) + y_{n-1}(\theta)$$

с начальными условиями  $F_1(\theta) = 1$ ,  $F_2(\theta) = 2 \sinh \theta$  и  $L_0(\theta) = 2$ ,  $L_1(\theta) = 2 \sinh \theta$ , соответственно. Исмаил показал, что  $F_n(\theta)$  порождают классическую проблему моментов для меры

$$\nu(x) = (1 - q^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha k} \delta(x - q^k e^{-\theta}),$$

где  $\delta(x - c)$  единичная дискретная мера, сосредоточенная в точке  $x = c$ . При четных  $\alpha$  эта мера положительна с единичной полной массой, а в остальных случаях  $\nu$  является единичной "signed" мерой. Этой мере

соответствуют ортогональные многочлены  $\{p_n(xe^\theta; q^{\alpha-1}, 1)\}$ , известные как малые  $q$ -полиномы Якоби, имеющие явный вид

$$\begin{aligned} p_n(x; a, b) &= {}_2\phi_1(q^{-n}, abq^{n+1}; aq; q, qx) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(q; q)_n (abq^{n+1}; q)_j}{(q; q)_j (q; q)_{n-j}} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{(-x)^j}{(aq; q)_j}, \end{aligned}$$

где  $q$ -факториалы определяются формулой

$$(\lambda; q)_s = (1 - \lambda)(1 - \lambda q) \dots (1 - \lambda q^{s-1}).$$

Наличие меры ортогональности позволяет, используя развитый авторами метод, построить деформированную осцилляторо-подобную систему – осциллятор Фибоначчи, для которого эти полиномы играют ту же роль, что и полиномы Эрмита для стандартного квантового гармонического осциллятора. Приведем основные моменты такого построения (более подробное описание см., например, в нашей работе [32]).

Пусть  $\mu$  – вероятностная мера на  $\mathbb{R}^1$  с конечными моментами  $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu$ . Эти моменты однозначно определяют положительную последовательность  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  и систему ортогональных многочленов с рекуррентным соотношением

$$x \Psi_n(x) = b_n \Psi_{n+1}(x) + b_{n-1} \Psi_{n-1}(x).$$

Пусть  $J = \{b_{i,j}\}$  соответствующая трех-диагональная матрица Якоби, у которой отличны от нуля только элементы  $b_{i,i+1} = b_{i+1,i} = b_i$ . Тогда в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_\mu$ , растянутом этими полиномами, можно определить сопряженные друг другу операторы рождения и уничтожения  $a_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu \pm iP_\mu)$ , оператор  $N_\mu$ , нумерующий базисные состояния, и самосопряженный гамильтониан  $H_\mu = X_\mu^2 + P_\mu^2 = a_\mu^+ a_\mu^-$ , положив

$$a_\mu^+ \Psi_n(x) = \sqrt{2}b_n \Psi_{n+1}(x); \quad a_\mu^- \Psi_n(x) = \sqrt{2}b_{n-1} \Psi_{n-1}(x);$$

$$N_\mu \Psi_n(x) = n \Psi_n(x), \quad H_\mu \Psi_n(x) = \lambda_n \Psi_n(x),$$

где  $\lambda_0 = 2b_0^2$ ,  $\lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2)$ . Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям обобщенной алгебры Гейзенберга

$$[a_\mu^-, a_\mu^+] = 2(B(N_\mu + I) - B(N_\mu)); \quad [N_\mu, a_\mu^\pm] = \pm a_\mu^\pm,$$

где

$$B(N_\mu) \Psi_n(x) = b_{n-1}^2 \Psi_n(x).$$

Центр этой алгебры порождается элементом  $C = 2B(N_\mu) - a_\mu^+ a_\mu^-$ . При соответствующих изменениях те же рассуждения применимы и к более общему случаю

$$x \Psi_n(x) = b_n \Psi_{n+1}(x) + a_n \Psi_{n+1}(x) + b_{n-1} \Psi_{n-1}(x)$$

Когерентные состояния типа Барута - Жирарделло для такого обобщенного осциллятора определяются соотношениями

$$a^- |z\rangle = z |z\rangle, \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!} \Psi_n,$$

$$\text{где} \quad \mathcal{N}(|z|^2) = \langle z|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!}$$

Можно доказать, что так определенные когерентные состояния образуют сверхполное семейство состояний в гильбертовом пространстве и являются состояниями, минимизирующими соответствующее соотношение неопределенности.

За последние годы мы применили этот подход к

- некоторым классическим ортогональным многочленам непрерывного аргумента (Полиномы Лагерра, Чебышева (первого и второго рода), Лежандра, Гегенбауера и Якоби);
- некоторым классическим ортогональным многочленам дискретного аргумента (Полиномы Мейкснера, Шарлье, Кравчука);
- дискретным и непрерывным q-полиномам Эрмита.

Основная сложность в применении такого подхода состоит в решении проблемы моментов необходимой для построения меры ортогональности для полиномов (в не классическом случае) и для меры участвующей в соотношении (сверх)полноты для когерентных состояний. Возникает также ряд проблем с получением явного вида когерентных состояний в терминах специальных (гипергеометрических или базисных гипергеометрических) функций.

Ричардсон [33], заметил, что матрица  $\mathfrak{F}_n$  с элементами  $\frac{1}{F_{i+j+1}}$ , где  $F_n$  —  $n$ -ое число Фибоначчи, имеет в качестве обратной матрицу с целочисленными элементами. (Так как тем же свойством обладает матрица Гильберта, то он назвал эту матрицу матрицей Филберта, образо-

вав термин по правилу Fi(bonacci)+(Hi)lbert.) Используя этот результат, Берг [34] показал, что последовательность  $\frac{1}{F_{n+2}}$  чисел обратных к числам Фибоначчи является последовательностью моментов дискретной вероятностной меры. Он также установил, что эта мера является мерой ортогональности для малых  $q$ -полиномов Якоби

$$p_n(x; a, b; q) = {}_2\phi_1 \left( \frac{q^{-n}, abq^{n+1}}{aq}; q, xq \right),$$

при  $a = q$ ,  $b = 1$  и  $q = \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$ .

Применив, описанный выше метод построения обобщенного осциллятора в случае полиномов  $p_n(x) \equiv p_n(x; a, b; q)$  мы получаем соответствующую осцилляторо-подобную систему и набор когерентных состояний для нее. Мы назовем эту систему осциллятором Фибоначчи.

В нашем случае рекуррентные соотношения имеют вид

$$-xp_n(x) = A_n p_{n+1}(x) - (A_n + C_n)p_n(x) + C_n p_{n-1}(x),$$

где  $p_0(x) = 1$  и

$$A_n = q^n \frac{(1 - aq^{n+1})(1 - abq^{n+1})}{(1 - abq^{2n})(1 - abq^{2(n+1)})}, C_n = aq^n \frac{(1 - q^n)(1 - bq^n)}{(1 - abq^{2n})(1 - abq^{2(n+1)})}.$$

Обозначим  $p_n(x) = \gamma_n \Psi_n(x)$ , где  $\gamma_0$  и

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{C_1 C_2 \cdots C_n}{A_0 A_1 \cdots A_{n-1}}} = \left( a^n q^n \frac{1 - abq}{1 - abq^{2n+1}} \frac{(q, q)_n (bq, q)_n}{(aq, q)_n (abq, q)_n} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что в случае  $a = q$ ,  $b = 1$  мы имеем

$$\gamma_n = q^n \frac{(q, q)_n}{(q^2, q)_n} \sqrt{\frac{1 - q^2}{1 - q^{2(n+1)}}}.$$

Тогда для  $\Psi_n(x)$  получаем

$$x\Psi_n(x) = -b_n \Psi_{n+1}(x) + a_n \Psi_n(x) - b_n \Psi_{n-1}(x),$$

где  $\Psi_0(x) = 1$ ,  $a_n = A_n + C_n$  и  $b_{n-1} = \sqrt{A_{n-1} C_n}$ .

При  $a = q$ ,  $b = 1$  имеем

$$a_n = \frac{q^n}{1 - q^{2(n+1)}} \left( \frac{(1 - q^n)^2}{1 - q^{2n+1}} + \frac{(1 - q^{n+2})^2}{1 - q^{2n+3}} \right),$$

$$b_{n-1} = \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n+1})}{\sqrt{(1 - q^{2n})(1 - q^{2(n+1)})}}.$$

Положим теперь  $X_\mu = \text{Re}(\tilde{X}_\mu - \tilde{P}_\mu)$ ,  $P_\mu = (-i)\text{Im}(\tilde{X}_\mu - \tilde{P}_\mu)$ , где операторы  $\tilde{X}_\mu$  и  $\tilde{P}_\mu$  определяются формулами

$$\tilde{X}_\mu \Psi_n = b_{n-1} \Psi_{n-1} + a_n \Psi_n + b_n \Psi_{n+1};$$

$$\tilde{P}_\mu \Psi_n = i(b_{n-1} \Psi_{n-1} + a_n \Psi_n - b_n \Psi_{n+1}).$$

В результате, используя описанные выше соотношения, мы определим алгебру осциллятора Фибоначчи.

Когерентные состояния типа Барута - Жирарделло для этого осциллятора определим, как и выше, соотношениями

$$a^- |z\rangle = z |z\rangle, \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2} (|z|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!} \Psi_n,$$

и после некоторых преобразований получаем следующее выражение для нормировочного множителя

$$\mathcal{N}(|z|^2) = {}_6\phi_1 \left( -q, -q^{3/2}, q^{3/2}, q^{3/2}, -q^{3/2}, -q^2 \middle| q; \frac{|z|^2}{2} \right).$$

где по определению

$${}_6\phi_1 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \\ b_1 \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; q)_k}{(b_1; q)_k} (-1)^{2k} q^{-2k \binom{k}{2}}$$

и мы использовали стандартное обозначение для  $q$ -символа Похгаммера:

$$(a; q)_0 = 1, \quad (a; q)_n = (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_m; q)_n.$$

В случае  $a = q$ ,  $b = 1$  выражение для когерентных состояний упрощается и имеет вид

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n+3)/2} p_n(x; q, 1|q) \frac{(q^3; q)_{2n}}{(q; q)_n^2} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

с тем же выражением для нормирующего множителя. Для завершения нашего построения желательно найти явно меру, участвующую в соотношении сверхполноты для построенных когерентных состояний осциллятора Фибоначчи. В настоящий момент эта задача находится в стадии разработки.

В заключение данной работы укажем на ряд других работ, в которых обсуждаются деформированные осцилляторы связанные с (обобщенными) числами Фибоначчи.

1) В работе [35] рассматривался деформированный осциллятор  $aa^+ = [N]$ ,  $a^+ = [N + 1]$  с соотношением  $[N + 2] = \alpha[N + 1] + \beta[N]$ ,  $[0] = 0$ ,  $[1] = 1$ . Решение этого соотношения дает базисное число  $[n] = \frac{q^{2n} - p^{2n}}{q^2 - p^2}$  с  $\alpha = q^2 + p^2$  и  $\beta = -q^2 p^2$ . Таким образом эти авторы воспроизводят  $(p, q)$ -деформацию осциллятора.

2) В работе [36] обсуждается расширенная осцилляторная алгебра

$$\begin{aligned} Ha^+ &= a^+(rH + J), & aH &= (rH + J)a, \\ Ja &= sa^+H, & aJ &= sHa, & [a, a^+] &= (r - 1)H + J. \end{aligned}$$

В представлении Фока эти операторы действуют по формулам

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \alpha_n|n\rangle, & J|n\rangle &= \beta_n|n\rangle, \\ a^+|n\rangle &= N_n|n+1\rangle, & a|n\rangle &= N_{n-1}|n-1\rangle, \\ \alpha_{n+1} &= r\alpha_n + s\alpha_{n-1}, & \beta_n &= s\alpha_n, & N_{n+1}^2 &= \alpha_{n+2} - \alpha_0. \end{aligned}$$

3) В работе [37] рассматривается расширенная осцилляторная алгебра в случае  $k$  дополнительных операторов  $J_i$ .

## Список литературы

- [1] Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи. Серия: *Популярные лекции по математике*, вып.6, 2-е изд. "Наука"М., 1964.

- [2] S. Vajda, Fibonacci and Lucas numbers and golden section: Theory and applications. Ellis Horwood, 1989.
- [3] V. W. Spinadel, From golden mean to chaos. 2nd ed. Nobuko, 2004.
- [4] V. E. Hoggat, D. A. Lindt, The daying rabbit problem. *Fibonacci Quart.* **7:4**, 482-487 (1969).
- [5] A. M. Oller, The dying rabbit problem revisited. arXiv:math/07102216.
- [6] Subhash Kak, The Golden Mean and the Physics of Aesthetics. *Foarm Magazine* **5**, 73-81 (2006), (arXiv:physics/0411195).
- [7] R. D. Mauldin, S. C. Willams, Random recursive construction *Trans. Amer. Math. Soc.* **295**, 325-346 (1986).
- [8] G. A. Bergman, A number system with irrational base. *Math. Magazine* **no.31**, 98-119 (1957).
- [9] R. Askey, Fibonacci and Related Sequences. *Math. Teacher* **97:2**, 116-119 (2004).
- [10] R. Askey, Fibonacci and Lucas Numbers. *Math. Teacher* **98:9**, 610-614 (2005).
- [11] M. E. H. Ismail, One parameter Generalizations of the Fibonacci and Lucas polynomials. arXiv:math/0606743 (2006).
- [12] D. S. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951-1953 (1984).
- [13] P. J. Steinhardt, S. Ostland, The physics of quasicrystals. WS 1987.
- [14] D. P. Di Vincenzo, P. J. Steinhardt, Quasicrystals: The state of art. WS 1991.
- [15] C. Janot, Quasicrystals - a primer. Carledon Press, Oxford, 1994.
- [16] R. Merlu a.o. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1768 (1985).
- [17] A. Sütö, The spectrum of a quasiperiodic Schrodinger operator. *Commun. Math. Phys.* **111**, 409-415 (1987).
- [18] A. Sütö, Cantor set of zero Lebesgue measure for the Fibonacci hamiltonian. *J. Stat. Phys.* **56**, 525-531 (1989).
- [19] J. Bellissard, B. Iochum, E. Scoppola, D. Testard, Spectral theory of the one-dimensional quasicrystal. *Commun. Math. Phys.* **125**, 527-543 (1989).
- [20] M. S. El Naschie, Statistical geometry of a Cantor discret spectrum and semiconductors. *Computer Math. Appl.* **29:12**, 103-110 (2005).
- [21] M. S. El Naschie, Quantum mechanics and the possibility of a Cantorian space-time. *Chaos, solitons and fractals* **4:2**, 177-179 (1994).
- [22] M. S. El Naschie, Elementary number theory in superstrings, loop quantum mechanics, twistors and E-infinity high energy physics. *Chaos, solitons and fractals* **27:2**, 297-330 (2006).
- [23] A. C. Newell, P. D. Shipman, Plants and Fibonacci. *J. Stat. Phys.* **121(5/6)**, 937-968 (2005).



- [24] D. Reinhard, A new chapter in an old tale about beauty and magic numbers. *Current opinion in plant biology* **8**, 1-7 (2005).
- [25] А. Ю. Южанников, А. Г. Степанов, Числа Фибоначчи и оценка состояния изоляции трансформаторов. *Совер. пробл. науки и образования* вып. **16**, 13-18 (2007).
- [26] M. Arik, D. D. Coon, Hilbert space of analytic functions and generalized coherent states. *J. Math. Phys.* **17**, no. 4, 524-527 (1976).
- [27] L. C. Biedenharn, The quantum group  $su_q(2)$  and  $q$ -analog of the boson operators. *J. Phys. A* **22**, no. 18, L873-878 (1989).
- [28] A. J. Macfarlane, On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $su_q(2)$ . *J. Phys. A* **22**, no 21, 4581-4586 (1989).
- [29] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, On the  $q$ -oscillator and the quantum algebra  $su_q(1, 1)$ . *J. Phys. A* **23**, no 9, L415-419 (1990).
- [30] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, A  $(p, q)$ -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *J. Phys. A* **24** no. 13, L711-718 (1991).
- [31] W. T. Lu, F. Y. Wu, Generalized Fibonacci numbers and dimer statistics. *Mod. Phys. Lett. B* **16**, 1177 (2002); arXiv : cond-mat/0212334.
- [32] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, Обобщенные когерентные состояния для осцилляторов связанных с  $q$ -полиномами Шарлье. *Теор. Мат. Физ.* **155:1**, 39-46 (2008).
- [33] T. M. Richardson, The Filbert matrix. *Fibonacci Quart.* **39:3**, 268-275 (2001).
- [34] C. Berg, Fibonacci numbers and orthogonal polynomials. arXiv : math/0602283.
- [35] M. Arik, E. Demircan, T. Turgut, L. Ekinici and M. Mungan, Fibonacci Oscillators. *Z. Phys. C* **55:1**, 89-96 (1992).
- [36] J. de Souza, E. M. F. Curado and M. A. Rego-Monteiro, Generalized Heisenberg Algebras and Fibonacci Series. *J. Phys. A* **39:33**, 10415-10425 (2006).
- [37] M. Schork, Generalized Heisenberg algebras and  $k$ -generalized Fibonacci numbers. *J. Phys. A* **40:15**, 4207-4214 (2007).

# Разложение уравнений Эйнштейна по фоновому гравитационному полю

В. Ю. Дорофеев\*

*Лаборатория теоретической физики им. А.А. Фридмана,  
Санкт-Петербург, Россия*

Считая, что уравнения Эйнштейна разбиваются на фоновую метрику и малые к ней возмущения, исследуются кубические поправки гравитационных волн.

## Введение

Вопрос об устойчивости решений уравнений Эйнштейна в однородных и изотропных моделях исследовался в работе Лифшица [1]. В настоящее время поднимается вопрос об устойчивости этих решений относительно возмущений, индуцированных квантованными гравитационными волнами [2], что осталось за пределами исследования упомянутой статьи Лифшица, в которой тем не менее было приведено решение, свидетельствующее об их усилении. Возникает идея о том, что усиление гравитационных волн обусловлена линейным характером приближения для малых возмущений и учёт более высокой степени малости приведёт к подавлению эффектов усиления. В этой работе предлагается уравнение для любого порядка малости возмущений в уравнениях Эйнштейна и исследуется влияние кубических возмущений.

## 1. Выделение возмущения в тензоре кривизны

В ряде случаев необходимо иметь разложение уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa T_{ik} \quad (1)$$

---

\*present address: *СПб ГУЭФ, Садовая 21, Санкт-Петербург, Россия*  
E-mail: dor@vd8186.spb.edu

или

$$R_k^i = \kappa(T_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i T) \quad (2)$$

по малому возмущению. При этом считается, что имеется некоторое фоновое поле  $g_{ik}^{(\circ)}$ , на котором вводится малое возмущение  $h_{ik}$ :

$$g_{ik} = g_{ik}^{(\circ)} + h_{ik} \quad (3)$$

так, что при  $h_{ik} = 0$ . Метрика  $g_{ik}^{(\circ)}$  является решением уравнений Эйнштейна вида

$$R_{ik}^{(\circ)} = \kappa(T_{ik}^{(\circ)} - \frac{1}{2}g_{ik}^{(\circ)} T^{(\circ)}). \quad (4)$$

Договоримся опускать и поднимать индексы с помощью фоновой метрики  $g_{ik}^{(\circ)}$ :  $h_k^i = g^{in(\circ)} h_{nk}$  и разложим уравнения (2) в ряд по  $h_k^i$ :

$$R_k^i + \delta R_k^i = \kappa(T_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i T + \delta T_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta T), \quad (5)$$

откуда в силу (4) возмущения  $h_{ik}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\delta R_k^i = \kappa(\delta T_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta T). \quad (6)$$

Для нахождения представления (6) через динамическую поправку  $h_{ik}$  нам потребуется выражение полного метрического тензора с верхними индексами:

$$g^{ik} = g^{(\circ) ik} - h^{ik} + h^{il} h_l^k - \dots = g^{(\circ) il} (1 + h)^{-1k}_l \quad (7)$$

(Полученное равенство следует из того, что матрицы с верхними индексами ( $g^{ik}$ ) и с нижними индексами ( $g_{ik}$ ) взаимнообратны:

$$\delta_l^k = g^{ik} g_{il} = g^{ik} (g_{ik}^{(\circ)} + h_{ik}). \quad (8)$$

Следует иметь ввиду, что представление (7) справедливо только при условии, что ряд сходится, что будет выполняться, если все собственные значения матрицы ( $h_{ik}$ ) меньше единицы.

Выделим зависимость от возмущения  $h_{ik}$  в символе Римана-Кристоффеля.

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ip} (g_{lp,k} + g_{kp,l} - g_{lk,p}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} g^{(\circ) il} (1+h)^{-1p} (g^{(\circ) l_{p,k}} + h_{l_{p,k}} + g^{(\circ) k_{p,l}} + h_{k_{p,l}} - g^{(\circ) l_{k,p}} - h_{l_{k,p}}) = \\
&= \frac{1}{2} (g^{(\circ) ip} - h^{ip} + h_q^i h_p^q - \dots) (g^{(\circ) l_{p,k}} + h_{l_{p,k}} + g^{(\circ) k_{p,l}} + h_{k_{p,l}} - g^{(\circ) l_{k,p}} - h_{l_{k,p}}) = \\
&= \Gamma_{kl}^{(\circ) i} - h^{iq} (1+h)_q^p \Gamma_{plk}^{(\circ)} + \frac{1}{2} g^{(\circ) il} (1+h)^{-1p} \cdot \\
&\cdot (h_{l_{p,k}} + h_{k_{p,l}} - h_{l_{k,p}} + \Gamma_{lp}^s h_{ks} + \Gamma_{lk}^s h_{ps} + \Gamma_{kp}^s h_{ls} + \Gamma_{kl}^s h_{ps} - \Gamma_{lp}^s h_{ks} - \Gamma_{kp}^s h_{ls}) = \\
&= \Gamma_{kl}^{(\circ) i} + \frac{1}{2} (1+h)^{-1i} (h_{l;k}^p + h_{k;l}^p - h_{lk}^p). \tag{9}
\end{aligned}$$

(Точка с запятой здесь и далее обозначает ковариантную производную по фоновому полю.) Вводя обозначения

$$H_{kl}^i = h_{l;k}^p + h_{k;l}^p - h_{lk}^p, \quad \widehat{H}_{kl}^i = (1+h)^{-1i} H_{kl}^p, \tag{10}$$

запишем Символ Кристоффеля в виде

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^{(\circ) i} + \widehat{H}_{kl}^i. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что

$$(1+h)^{-1i}{}_{k,l} = -(1+h)^{-1i} h_{q,l}^p (1+h)^{-1q}{}_k. \tag{12}$$

Выделим часть, соответствующую возмущениям в тензоре кривизны:

$$R_{klm}^i = \Gamma_{km,l}^i - \Gamma_{kl,m}^i + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n = R_{klm}^{(\circ) i} + \widehat{H}_{klm}^i, \tag{13}$$

где

$$\widehat{H}_{klm}^i = \widehat{H}_{km;l}^i - \widehat{H}_{kl;m}^i + \widehat{H}_{nl}^i \widehat{H}_{km}^n - \widehat{H}_{nm}^i \widehat{H}_{kl}^n$$

Аналогичный расчёт проведём для тензора Риччи и скалярной кривизны.

$$\begin{aligned}
R_{ik} &= R_{ilk}^l = R_{ilk}^{(\circ) l} + \widehat{H}_{ilk}^l = \\
&= R_{ik}^{(\circ)} + \frac{1}{2} (1+h)^{-1l}{}_{\nu'} (h_{i;k;l}^{\nu'} + h_{k;i;l}^{\nu'} - h_{ik;l}^{\nu'} - h_{l;k;i}^{\nu'}) + \\
&+ \frac{1}{4} (1+h)^{-1l}{}_{\nu'} (1+h)^{-1n}{}_{n'} (h_{n;k}^{\nu'} h_{l;i}^{n'} - (2h_{n;l}^{\nu'} - h_{l;n}^{\nu'})).
\end{aligned}$$

$$\cdot (h_{k;i}^{n'} + h_{i;k}^{n'} - h_{ik}^{;n'}) - 2h_{k;n}^{l'} (h_{i;l}^{n'} - h_{il}^{;n'})). \quad (14)$$

Тензор Риччи со смешанными индексами получается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_k^i &= g^{ip} R_{pk} = \overset{(\circ)}{R}{}^{ip} (1+h)^{-1q} (\overset{(\circ)}{R}{}_{qlk}^l + \widehat{H}_{qlk}^l) = \\ &= \overset{(\circ)}{R}{}^i_k + (1+h)^{-1i'} (-h_n^{i'} \overset{(\circ)}{R}{}^n_k + \frac{1}{2} (1+h)^{-1l'} (h_{k;l}^{l'i'} + h_{k;l}^{l';i'} - h_{k;l}^{i';l'} - h_{l;k}^{l';i'}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} (1+h)^{-1l'} (1+h)^{-1n'} (h_{n;k}^{l'} h_l^{n';i'} - (2h_{n;l}^{l'} - h_{l;n}^{l'})) \cdot \\ &\quad \cdot (h_k^{n';i'} + h_{;k}^{n'i'} - h_k^{i';n'}) - 2h_{k;n}^{l'} (h_{;l}^{n'i'} - h_l^{i';n'})). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} R &= R_i^i = \overset{(\circ)}{R} + (1+h)^{-1i'} (-h_n^{i'} \overset{(\circ)}{R}{}^n_i + (1+h)^{-1l'} (h_{i;l}^{l'i'} - h_{i;l}^{i';l'}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} (1+h)^{-1l'} (1+h)^{-1n'} (3h_{n;i}^{l'} h_l^{n';i'} - 2h_{i;n}^{l'} h_{;l}^{n'i'} - \\ &\quad - h_{l;n}^{l'} h_k^{i';n'} + 4h_{n;l}^{l'} (h_i^{i';n'} - h_i^{n';i'})). \end{aligned} \quad (16)$$

## 2. Выделение возмущения в тензоре кривизны на фоне метрики Фридмана

Пусть

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{l}^2, \quad (17)$$

где  $\eta$  – конформное время.

Здесь и далее латинские индексы –  $i, k, \dots$  пробегает значения 0, 1, 2, 3, а греческие – 1, 2, 3.

Ранее нигде не вводились ограничения на динамические возмущения, но так как для нас представляет интерес именно гравитационный аспект, то учтём, что в, как показано в [1], в нашем случае можно, во-первых, потребовать  $h_{0i} = 0$ . А так как  $h_{ik}$  можно представить в виде:  $h_k^i = S_k^i + V_k^i + B_k^i$ , где  $S_k^i, V_k^i, B_k^i$  – неприводимые скалярная, векторная и тензорная компоненты соответственно тензора  $h_k^i$ , удовлетворяющие условиям [1]:

$$\overset{(\circ)}{g}_{ik} S^{ik} = S \neq 0, \quad \overset{(\circ)}{g}_{ik} V^{ik} = 0, \quad \overset{(\circ)}{g}_{ik} B^{ik} = 0,$$

то

$$h = 0, \quad h_{k;\bar{i}}^i = 0. \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta R &= (1+h)^{-1k} ((1+h)^{-1l} (h_{k;\bar{l}}^{l';k'} - h_{k;\bar{l}}^{k';l'}) - \frac{1}{a^2} h_{k,0,0}^{k'} - \frac{3a'}{a^3} h_{k,0}^{k'}) + \\ &+ \frac{2\epsilon}{a^2} h_k^{k'} + \frac{1}{4} (1+h)^{-1l} (1+h)^{-1n} (4h_{n;\bar{l}}^{l'} (h_k^{k';n'} - h_k^{n';k'}) + 3h_{k;\bar{n}}^{l'} h_l^{n';k'} - \\ &- 2h_{k;\bar{n}}^{l'} h_{\bar{l}}^{n';k'} - h_{l;\bar{n}}^{l'} h_k^{k';n'}) + \frac{1}{4a^2} (1+h)^{-1l} (3h_{k,0}^{l'} h_{l,0}^{k'} - h_{l,0}^{l'} h_{k,0}^{k'}). \\ \delta R_0^0 &= -\frac{1}{2a^2} (1+h)^{-1l} (h_{l,0,0}^{l'} + \frac{a'}{a} h_{l,0}^{l'} - \frac{1}{2} (1+h)^{-1n} h_{n,0}^{l'} h_{l,0}^{n'}). \\ \delta R_\alpha^0 &= \frac{1}{2a^2} (1+h)^{-1l} (h_{\alpha;\bar{l},0}^{l'} - h_{l;\bar{\alpha},0}^{l'}) + \frac{1}{4a^2} (1+h)^{-1n} \cdot \\ &\cdot (h_{n;\bar{\alpha}}^{l'} h_{l,0}^{n'} - h_{\alpha,0}^{n'} (2h_{n;\bar{l}}^{l'} - h_{l;\bar{n}}^{l'})). \\ \delta R_\beta^\alpha &= (1+h)^{-1\alpha} (\frac{1}{2} (1+h)^{-1l} ((h_{\beta;\bar{l}}^{l';\alpha'} + h_{\beta;\bar{l}}^{l';\alpha'} - h_{\beta;\bar{l}}^{i';\alpha'} - h_{l;\bar{\beta}}^{l';\alpha'}) + \\ &+ \frac{1}{4} (1+h)^{-1n} (h_{n;\bar{\beta}}^{l'} h_l^{n';\alpha'} - (2h_{n;\bar{l}}^{l'} - h_{l;\bar{n}}^{l'}) \cdot (h_\beta^{n';\alpha'} + h_{\beta;\bar{l}}^{n';\alpha'} - h_{\beta;\bar{l}}^{i';\alpha'})) - 2h_{\beta;\bar{n}}^{l'} \cdot \\ &\cdot (h_{\bar{l}}^{n';\alpha'} - h_{l;\bar{n}}^{i';\alpha'})) - \frac{1}{4a^2} (h_{\beta,0}^{i'} h_{l,0}^{l'} - 2h_{l,0}^{i'} h_{\beta,0}^{l'})) - \frac{1}{2a^2} h_{\beta,0,0}^{i'} - \frac{a'}{a^3} h_{\beta,0}^{i'} + \frac{2\epsilon}{a^2} h_{\beta}^{i'}) - \\ &- \frac{a'}{2a^3} \delta_\beta^\alpha (1+h)^{-1l} h_{l,0}^{l'}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\epsilon = \pm 1, 0$  для закрытой, открытой и плоской Вселенных соответственно. Здесь далее знак « $\bar{\cdot}$ » обозначает ковариантную производную по пространственной части метрики, а обозначение « $,0$ » либо штрих – производную по конформному времени  $\eta$ .

### 3. Уравнения гравитационных волн в третьем приближении

ТЭИ однородной изотропной жидкости имеет вид

$$T_k^i = (\epsilon + p) u^i u_k - \delta_k^i p. \quad (20)$$

Тогда

$$\delta T_k^i = (\delta\varepsilon + \delta p)u^i u_k - \delta_k^i \delta p + (\varepsilon + p)(\delta u^i u_k + u^i \delta u_k + \delta u^i \delta u_k). \quad (21)$$

Четырёхскорости  $u_i$  и  $u^i$  удовлетворяют условиям  $g_{ik}u^i u^k = 1$  и  $g^{ik}u_i u_k = 1$ , поэтому

$$2 u^k \delta u^k + g^{ik} \delta u^i \delta u^k = 0. \quad (22)$$

Заметим,  $\delta u_i$  из-за связей (18) может зависеть только от свёрток вида  $h_k^j h_{j;i}^k \dots$ , поэтому  $\delta u^\alpha \delta u^\beta$  зависит как минимум от квадратов этих свёрток и выше. Но четвёртыми и более высокими степенями будем пренебрегать. В синхронной системе отсчёта,  $u^0 = 1/a$ ,  $u^\alpha = 0$ , тогда из (22) следует  $\delta u^0 = 0$ , откуда

$$\delta R_0^0 = \frac{1}{2}\kappa(\delta\varepsilon + 3\delta p), \quad \delta R_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\kappa\delta_\beta^\alpha(\delta p - \delta\varepsilon), \quad \delta R_0^\alpha = a\kappa(\varepsilon + p)\delta u^\alpha. \quad (23)$$

Ограничимся в (17) случае плоского пространства с  $\epsilon = 0$ . Тогда  $h_{\beta;\gamma}^\alpha = h_{\beta,\gamma}^\alpha h_{\alpha}^{\beta;\gamma} = \frac{1}{a^2}h_{\alpha}^{\beta,\gamma}$ , где индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики пространства Минковского. Так как на уравнения (23) можно смотреть как на уравнения Эйлера-Лагранжа для полей  $h_{ik}$ , то с учётом связей (18) с точностью до дивергентных членов будем считать, что не только  $h_{k;i}^i = 0$ , но и  $h_l^k h_{n;k}^i = 0, \dots$ , в силу чего (19) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta R_\beta^\alpha &= (1+h)^{-1\alpha} \frac{1}{i'} (1+h)^{-1l} (-h_{\beta;l}^{i';l'} - h_{l;\beta}^{l';i'}) + \\ &+ \frac{1}{4} (1+h)^{-1l} (1+h)^{-1n} (h_{n;\beta}^{l'} h_l^{n';i'} - h_{l;n}^{l'} h_\beta^{i';n'} + 2h_{\beta;n}^{l'} h_l^{i';n'}) - \\ &- \frac{a'}{2a^3} \delta_\beta^\alpha (1+h)^{-1l} h_{l,0}^{l'} + (1+h)^{-1\alpha} (-\frac{1}{2a^2} h_{\beta,0,0}^{i'} - \frac{a'}{a} h_{\beta,0}^{i'}) - \\ &- \frac{1}{4a^2} (1+h)^{-1l} (h_{\beta,0}^{i'} h_{l,0}^{l'} - 2h_{l,0}^{i'} h_{\beta,0}^{l'}). \end{aligned} \quad (24)$$

Из вида (24) следует, что вместо (6) удобнее рассматривать уравнения

$$(1+h)_\alpha^\gamma \delta R_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\kappa(1+h)_\beta^\gamma(\delta p - \delta\varepsilon). \quad (25)$$

Умножим последнее уравнение на « $-2a^2$ », тогда из (24) и (25) получим:

$$\begin{aligned} & h_{\beta,0,0}^\alpha + \frac{2a'}{a} h_{\beta,0}^\alpha + \frac{a'}{a} (1+h)_\beta^\alpha (1+h)^{-1l'} h_{l,0}^{l'} + \\ & + \frac{1}{2} (1+h)^{-1l'} (h_{\beta,0}^\alpha h_{l,0}^{l'} - 2h_{l,0}^\alpha h_{\beta,0}^{l'}) + (1+h)^{-1l'} (h_{\beta,l}^{\alpha;l'} + h_{l,\beta}^{l';\alpha}) - \\ & - \frac{1}{2} (1+h)^{-1l'} (1+h)^{-1n'} (h_{n,\beta}^{l'} h_{l,n'}^{\alpha} - h_{l,n}^{l'} h_{\beta}^{\alpha,n'} + 2h_{\beta,n}^{l'} h_{l,n}^{\alpha,n'}) = \\ & = a^2 \kappa (1+h)_\beta^\alpha (\delta\varepsilon - \delta p). \end{aligned} \quad (26)$$

Выделим первые три порядка разложения уравнений (26) по  $h_k^i$ :

$$\begin{aligned} & h_{\beta,0,0}^\alpha + \frac{2a'}{a} h_{\beta,0}^\alpha + \frac{1}{2} (\delta_{l'}^l - h_{l'}^l + h_k^l h_{l'}^k) (h_{\beta,0}^\alpha h_{l,0}^{l'} - 2h_{l,0}^\alpha h_{\beta,0}^{l'} + 2h_{\beta,l}^{\alpha;l'} + 2h_{l,\beta}^{l';\alpha} - \\ & - (\delta_{n'}^n - h_{n'}^n) (h_{n,\beta}^{l'} h_{l,n'}^{\alpha} - h_{l,n}^{l'} h_{\beta}^{\alpha,n'} + 2h_{\beta,n}^{l'} h_{l,n}^{\alpha,n'})) = \\ & = (\delta_\beta^\alpha + h_\beta^\alpha) (a^2 \kappa (\delta\varepsilon - \delta p) + \frac{a'}{a} (h_{l'}^l - h_k^l h_{l'}^k) h_{l,0}^{l'}). \end{aligned} \quad (27)$$

или

$$\begin{aligned} & h_{\beta,0,0}^\alpha + \frac{2a'}{a} h_{\beta,0}^\alpha + h_{\beta,l}^{\alpha;l} - h_{l,0}^\alpha h_{\beta,0}^{l'} - h_{l,n}^\alpha h_{\beta}^{l',n} - \frac{1}{2} h_{l,n}^{\alpha} h_{n,\beta}^{l'} - h_{l'}^l h_{l,\beta}^{l';\alpha} - \\ & - \delta_\beta^\alpha (a^2 \kappa (\delta\varepsilon - \delta p) + \frac{a'}{a} h_{n'}^n h_{n,0}^{n'}) + \\ & + \frac{1}{2} h_{l'}^l ((2h_{n,\beta}^{l'} h_{l,n}^{\alpha} - 2h_{l,n}^{\alpha} h_{\beta,n}^{l'} - h_{l,n}^{l'} h_{\beta}^{\alpha,n} + 2h_{l'}^l h_{l,\beta}^{l';\alpha} - h_{\beta,0}^\alpha h_{l,0}^{l'} + 2h_{\beta,0}^{l'} h_{l,0}^\alpha + \\ & + \frac{2a'}{a} \delta_\beta^\alpha h_{l,n}^n h_{n,0}^{l'} - \frac{2a'}{a} h_\beta^\alpha) h_{l,0}^{l'}) = h_\beta^\alpha a^2 \kappa (\delta\varepsilon - \delta p) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно

$$\delta_\beta^\alpha a^2 \kappa (\delta p - \delta\varepsilon) = h_{l,0}^\alpha h_{\beta,0}^{l'} + h_{l,n}^\alpha h_{\beta}^{l',n} + \frac{1}{2} h_{l,n}^{\alpha} h_{n,\beta}^{l'} + h_{l'}^l h_{l,\beta}^{l';\alpha} + \delta_\beta^\alpha \frac{a'}{a} h_{n'}^n h_{n,0}^{n'} \quad (29)$$

Избавляясь от дивергенции  $h_{l,\gamma}^\alpha h_{\beta}^{l,\gamma} + \frac{1}{2} h_{l'}^{\gamma,\alpha} h_{\gamma,\beta}^{l'} + h_{l'}^l h_{l,\beta}^{l';\alpha}$ , учитывая, что для выбранных ненулевых компонент тензора  $h_k^i$  имеет место равенство  $h_{l'}^l h_{l,n}^n h_{n'}^{l'} = 0$ , и приводя подобные, получим

$$h_{\beta,0,0}^\alpha + \frac{2a'}{a} h_{\beta,0}^\alpha + h_{\beta,\gamma}^{\alpha,\gamma} + h_{l'}^l h_{\beta,0}^{l'} h_{l,0}^\alpha +$$



$$+h_{l'}^l \left( \frac{1}{2} h_{l,n}^{l'} h_{\beta}^{\alpha,n} + h_{n'}^{l',\alpha} h_{l,\beta}^n - h_{\beta,n}^{l'} h_l^{\alpha,n} + h_n^l h_{l',\beta}^{n,\alpha} \right) = 0. \quad (30)$$

От переменных  $h_k^i$  перейдём к переменным  $\mu_k^i = a(\eta)h_k^i$ , которые при одновременном конформном преобразовании

$$\tilde{g}_{ik} = g_{ik}/a^2(\eta)$$

возвращают нас к полевым переменным со спином 2 в плоском пространстве Минковского с эффективным внешним полем:

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,0,0}^{\alpha} + \mu_{\beta,\gamma}^{\alpha,\gamma} - \frac{a''}{a} \mu_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{a^2} (\mu_{l,0}^{\alpha} - \frac{a'}{a} \mu_l^{\alpha}) (\mu_{\beta,0}^n - \frac{a'}{a} \mu_{\beta}^n) \mu_n^l + \\ + \frac{1}{a^2} \mu_{l'}^l \left( \frac{1}{2} \mu_{l,n}^{l'} \mu_{\beta}^{\alpha,n} + \mu_{n'}^{l',\alpha} \mu_{l,\beta}^n - \mu_{\beta,n}^{l'} \mu_l^{\alpha,n} + \mu_n^l \mu_{l',\beta}^{n,\alpha} \right) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Если ограничиться в возмущениях только временной зависимостью, то

$$\mu_{\beta,0,0}^{\alpha} - \frac{a''}{a} \mu_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{a^2} (\mu_{l,0}^{\alpha} - \frac{a'}{a} \mu_l^{\alpha}) (\mu_{\beta,0}^n - \frac{a'}{a} \mu_{\beta}^n) \mu_n^l = 0. \quad (32)$$

Ввиду калибровочных условий в последнем уравнении индексы принимают значения только 1 и 2. Считая, что  $y(t) = \mu_1^1 = -\mu_2^2$ ,  $x(t) = \mu_2^1 = \mu_1^2$ , приходим к системе из двух д. у.:

$$\begin{cases} y'' = \frac{a''}{a} y - \frac{1}{a^2} \left( (y' - \frac{a'}{a} y)^2 + (x' - \frac{a'}{a} x)^2 \right) y \\ z'' = \frac{a''}{a} z - \frac{1}{a^2} \left( (y' - \frac{a'}{a} y)^2 + (x' - \frac{a'}{a} x)^2 \right) z. \end{cases} \quad (33)$$

Анализ решений этой системы сводится к следующим результатам:

– обычно это сильнорастающие решения разных видов функций  $a(\eta)$  и различных начальных условий;

– для различных конформных факторов обычно имеются осциллирующие решения «вокруг» начальных условий, но амплитуда этих решений обычно определяется не начальными условиями, а космологическими величинами уравнений –  $a(\eta)$ ,  $a'(\eta)$ ,  $a''(\eta)$ .

Видимо самым интересным решением является случай, когда

– можно принудительно считать, что  $x(t) = 0$ , что допустимо как решении с нулевыми начальными условиями;

– можно пренебречь относительным изменением поля по сравнению с относительным изменением метрики ( $y'/y \ll a'/a$ );

– считать космологические величины постоянными ( $a'' = 1, a' = 1, a = 1$ ):

– начальные условия для второй переменной  $y$  взяты следующими:  $y(0) = 1, y'(0) = 0.01$ .

Тогда имеется осциллирующее решение относительно единицы, амплитуда которого определяется производной  $y'(0)$ .

Таким образом, уравнения (33) с нулевыми начальными условиями относительно всех мод  $\mu_{\beta}^{\alpha}$  и малыми начальными значениями производных приводят к сильно растущим решениям, приводящим к противоречиям в предположении об их малости и требующие специального анализа. Наличие двух мод с ненулевыми начальными возмущениями приводит к их взаимному индуцированию до космологических значений, что также входит в противоречие об их малости.

Устойчивое решение с малыми относительными колебаниями на временах малых по сравнению с космологическим, возможно, если принудительно занулить одну из мод, а ненулевое начальное значение другой моды взять из равенства нулю правой части д. у. (33)

**Благодарности.** Автор благодарит проф. А. А. Гриба за постоянные стимулирующие дискуссии по теме статьи.

## Список литературы

- [1] Е. М. Лифшиц, *О гравитационной устойчивости расширяющегося мира*, ЖЭТФ, 16, 587 (1946).
- [2] Л. П. Гришук, *Реликтовые гравитационные волны и космология*, УФН, т. 175 № 12, 2005.

# Нелинейные квантовые особенности рекомбинации первичного водорода

В. К. Дубрович \*

*Санкт-Петербургский филиал Специальной  
астрофизической обсерватории РАН*

Рассмотрены некоторые проблемы двухфотонного распада высоко возбужденных уровней атома водорода и гелия. Показано, что необходимая точность расчета вероятностей переходов требует отказа от чисто дипольного приближения в теории излучения атома водорода. Обсуждается вопрос о пределах применимости теории возмущений к этому процессу.

## 1. Введение

Стремительно нарастающий интерес к тонким эффектам процесса рекомбинации первичного водорода и гелия обусловлен новыми возможностями экспериментальной техники (см. [1] и цитированную там литературу). Сегодня оказываются востребованными результаты и идеи, ранее казавшиеся чисто “академическими” и поэтому зачастую даже не опубликованные. Очень существенными в этом плане являются исследования Зельдовича и др. [2], Холупенко и Иванчика [3], Крессера и др. [4], Флореску и др. [5], Дубровича [6], поскольку в них впервые были численно оценены вероятности нерезонансных двухфотонных распадов. Необходимо также отметить работы, посвященные общему рассмотрению двухфотонных распадов возбужденных состояний: Зон и др. [7], Кватропани и др. [8]. Хиратой и Свитцером [1] достаточно подробно обсуждаются двухфотонные распады с высоких уровней по результатам многочисленных работ разных авторов уже конкретно по отношению к проблеме рекомбинации первичного водорода и гелия. На основе численных расчетов и аналитических аппроксимаций показано, что их роль в динамике рекомбинации как водорода, так и гелия ранее, в частности в работе [9], была завышена. Однако использованные в [1] формулы

---

\*E-mail: dvk47@mail.ru

основаны на некоторых базовых приближениях, которые в данной задаче требуют более внимательного применения. В результате полученные оценки фактически могут привести к другой крайности – существенной недооценке роли двухфотонных распадов.

Мы подробно остановимся на этом вопросе в следующем разделе данной статьи. Далее будут описаны аргументы в пользу более глубокого рассмотрения вопроса о пределах применимости теории возмущений в данной задаче. Вообще при заданной точности расчетов список эффектов, которые необходимо еще учесть, должен быть дополнен. Целью данной статьи является описание только нескольких таких эффектов. В частности, при расчетах по теории переноса скорости уширения  $L_\alpha$  линии водорода может быть очень важным на некоторых этапах учет резонанса водородных и дейтериевых линий, описание которого также дано в статье. Учет этих эффектов может заметно повлиять на конечные оценки основных скоростей радиационных процессов в эпоху рекомбинации первичного водорода и гелия.

## 2. Недипольность радиационных двухфотонных распадов

Точность результатов стандартных расчетов скоростей радиационных процессов ограничена применимостью дипольного приближения в теории излучения атомов. Хирата, Свитцер [1] упоминают это утверждение из работы [9], но в дальнейшем везде полностью игнорируют. Рассмотрим более подробно величину ошибки, которая при этом возникает.

Напомним общие теоретические положения квантовой механики процесса излучения фотона. Вероятность излучения в единицу времени в первом приближении по теории возмущений определяется матричным элементом от возмущения  $V$  гамильтониана системы за счет взаимодействия фотона с токами заряженных частиц [10]

$$V = -q(j_\mu A^\mu), \quad (1)$$

где  $q$  — заряд частицы,  $A^\mu$  — волновая функция излучаемого фотона,  $j_\mu = (j_0, \mathbf{j})$  — 4-вектор плотности тока частиц. Волновая функция фотона с определенной частотой  $\omega$ , импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\mathbf{e}$

есть ([10], с. 190)

$$A^\mu = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} e^\mu \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (2)$$

(временной множитель опущен). После некоторых преобразований дифференциальная вероятность излучения  $d\omega_{fg}$  (в 1 с) в элемент телесного угла  $d\Omega$  фотона с поляризацией  $e = (0, \mathbf{e})$  при переходе системы из состояния  $f$  в состояние  $g$  может быть представлена в виде ([10], с. 194)

$$d\omega_{fg} = q^2 \frac{\omega}{2\pi} |\mathbf{e}^* \mathbf{j}_{fg}(\mathbf{k})|^2 d\Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_{fg}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{j}_{fg} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x. \quad (4)$$

Обратим внимание на стоящий под интегралом экспоненциальный множитель, который описывает излучаемый фотон. В принципе именно выражение (4) должно входить как матричный элемент гамильтониана взаимодействия во все формулы теории возмущений. Дипольное приближение получается из общей формулы (3) в случае, когда длина волны фотона  $\lambda$  много больше размера области излучения:  $kr = 2\pi r/\lambda \ll 1$ . Тогда экспонента в (3) принимается равной единице, а радиус орбиты входит в результат через свою производную – скорость движения частицы, определяющую ток. Такое приближение прекрасно работает практически для всех возможных переходов в атоме водорода, кроме двухфотонных распадов высоких состояний. Действительно, величина  $kr$  для переходов между близкими уровнями  $n > n'$  есть

$$kr \approx \frac{2\pi a_0 n^2}{\lambda_0} \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx 7.21 \times 10^{-4} \frac{n - n'}{n^2}, \quad (5)$$

где  $a_0 = 5.29 \times 10^{-9}$  – радиус первой боровской орбиты в атоме водорода,  $\lambda_0 = 0.912 \times 10^{-5}$  см – длина волны лаймановского предела. Для далеко отстоящих уровней, дающих лаймановские переходы, ситуация менее очевидная. Формально, длина волны  $L_n$  перехода становится порядка радиуса орбиты при том же значении  $n > 30$ . Однако, беря точное выражение для матричного элемента дипольного момента  $d_{1n}$  такого перехода ([10], с. 225), легко видеть, что основной вклад будут давать области радиуса вблизи центра и, соответственно, эффекты недипольности не существенны. Все эти оценки относятся к переходам, в которых номер уровня и частота излучаемого фотона жестко связаны. Совершенно иная ситуация складывается, когда мы рассматриваем не

резонансные переходы, а такие комбинации номеров уровней и частоты, в которых эти параметры независимы. Так, в двухфотонном распаде мы можем рассматривать переход между уровнями с одинаковым  $n$ , а длину волны фотона  $\lambda$  брать порядка  $2\lambda_0$ . Главный вклад в интеграл (3) будет при этом давать область вокруг радиуса  $r \approx a_0/n^2$ , а величина  $k \approx \pi/\lambda_0$ . В результате имеем  $kr \approx 1.8 \times 10^{-4}n^2$ . Для переходов между уровнями  $n$  и  $n'$  имеем  $kr \approx 1.8 \times 10^{-4}nn'$ .

Рассмотрим теперь качественно, к чему это приводит для оценки вероятности двухфотонного перехода. Хирата, Свитцер [1] приводят упрощенное описание характера подавления суммы матричных элементов для переходов с высоких уровней. Это рассмотрение вполне достаточно только для доказательства отсутствия роста данной суммы пропорционально  $n$ . Однако закон стремления ее к нулю ([1], приложение А) не очевиден, так как в рамках выбранного приближения отброшены дополнительные слагаемые, величина которых совершенно не оценена. Так, использование волновой функции в квазиклассическом приближении и интегрирование ее только по классически разрешенной области приводит к следующим ошибкам: 1) квазиклассическое интегрирование вблизи центра должно вестись от некоторого  $r_{\min} \approx l(l+1)a_0/n^2$  ( $l$  – орбитальный момент); 2) при больших  $n$  нужно учесть вклад в интеграл от области  $r > r_{\max}$ . Все эти оценки, однако, имеют характер математических упражнений, которые для достаточно малых  $n$  могут быть заменены точными численными расчетами, а для больших  $n$  теряют смысл, так как не учитывают недипольность переходов.

Применимость дипольного приближения ( $kr > 1$ ) теряется при  $n > 30$ . Однако высокая степень компенсации центрального матричного элемента (переход  $n - n$ ) суммой всех других матричных элементов уже не будет иметь место при гораздо меньших  $n$ . Действительно, коррекция за недипольность будет существенно различна для переходов вниз и вверх по  $n$ . Кроме того, появляется дополнительная, довольно сложная зависимость от частоты излучаемого фотона. Если при этом компенсация в начальной сумме имеет порядок  $1/n^2$ , а  $kr \approx 10^{-4}n^2$ , то учет недипольности будет менять характер компенсации уже при  $n > 10$ . Очень важно также учитывать то обстоятельство, что недипольность приводит к появлению на первом шаге переходов с изменением орбитального момента  $l$  электрона более чем на единицу. Это означает, что мы должны учитывать вклады в матричный элемент от таких переходов и суммировать по моменту соответствующие состояния с их статистическими весами. Конечный результат таких вычислений совершенно

не очевиден, а в цитированной разными авторами литературе такая задача не рассматривалась. Поэтому вопрос о роли двухфотонных переходов в динамике рекомбинации первичного водорода (и особенно гелия) остается открытым.

### 3. Пределы применимости теории возмущений

Еще один вопрос из теории квантовой механики в применении к задаче о двухфотонных переходах требует детального анализа. Это вопрос о пределах применимости теории возмущений для вычисления соответствующих вероятностей. Поясним, о чем идет речь. Согласно [10], выражение для добавки к гамильтониану (1) для дипольного электрического перехода можно записать в виде

$$V = (d\mathbf{E}), \quad (6)$$

где  $\mathbf{E}$  — вектор электрического поля излучаемого фотона. Условие применимости теории возмущений требует малости этой величины по сравнению со всеми характерными величинами в данной системе. Оценим значение  $V$  в нашем случае. Для этого в первом приближении нужно принять, что излучаемый в двухфотонном процессе квант с энергией  $hc/\lambda$  имеет широкую полосу по частоте и соответственно пространственно локализован в объеме порядка  $\lambda^3$ . Тогда величину  $E$  можно приближенно оценить из соотношения  $E^2/8\pi \approx hc/\lambda^4 \approx 5 \times 10^{-16}/\lambda^4$  (близкая оценка дана в [10], с. 31). Для  $V$  тогда имеем ( $q$  — заряд электрона и выбираем  $\lambda = 2\lambda_0$ ):

$$V \approx qrE = (8\pi hc)^{1/2} qa_0 n^2 / (4\lambda_0^2). \quad (7)$$

Это значение можно сравнить, например, с разностью энергий между уровнями с главными квантовыми числами  $n$  и  $n + 1$  —  $\epsilon_{n,n+1} \approx 2hc/(\lambda_0 n^3)$ :

$$V/\epsilon_{n,n+1} \approx (2\pi e^2/hc)^{1/2} a_0 n^5 / (4\lambda_0) \approx 1.35 \times 10^{-5} n^5. \quad (8)$$

Итак, мы видим, что уже для  $n = 10$  возмущение энергии электрона за счет взаимодействия с излучаемым фотоном (для  $n - n$  перехода и с частотой фотона порядка половины потенциала ионизации) становится

сравнимо с разностью энергий между соседними уровнями. Это означает, что мы должны существенно пересчитывать волновые функции соседних состояний, а значит, вопрос о применимости теории возмущений для таких переходов становится очень актуальным.

Приведенная оценка должна рассматриваться только как аргумент в пользу более внимательного подхода к расчету вероятностей переходов с участием относительно энергичных квантов. Результатом такого расчета может быть существенная редукция матричных элементов переходов между ближайшими уровнями при почти неизменных значениях остальных членов суммы. Степень компенсации главных членов ряда остальными слагаемыми тогда становится совершенно неочевидной. В связи с приведенными выше аргументами требуется пересмотр техники расчета интересующих нас вероятностей. Это может оказаться крайне затруднительным математически. Возможно, что наиболее простой путь решения этой проблемы — аккуратный лабораторный эксперимент.

## 4. Заключение

Отмеченные в данной работе квантовомеханические особенности процесса двухфотонного распада высоковозбужденных водородоподобных состояний оставляют открытым вопрос о вкладе этих процессов в полную скорость рекомбинации. Математически решение этого вопроса может быть слишком сложно и скорее всего необходимо проведение специальных лабораторных экспериментов для получения нужной информации.

## Список литературы

- [1] С. М. Hirata, E. R. Switzer. *Phys. Rev. D* **77**, 083007 (2008); *astro-ph/0702144* (2007).
- [2] Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев. *ЖЭТФ* **55**, 278 (1968).
- [3] Е. Е. Холупенко, А. В. Иванчик. *Письма в Астрон. журн.* **32**, 795 (2006).
- [4] J. D. Cresser et al. *Phys. Rev. A* **33**, 1677 (1986).
- [5] V. Florescu, I. Schneider, I. N. Mihalescu. *Phys. Rev. A* **38**, 2189 (1988).



- [6] В. К. Дубрович. *Оптика и спектроскопия* **63**, 439 (1987).
- [7] Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт. *ЖЭТФ* **55**, 924 (1968).
- [8] A. Quattronani, F. Bassani, S. Carillo. *Phys. Rev. A* **25**, 3079 (1982).
- [9] В. К. Дубрович, С. И. Грачев. *Письма в Астрон. журн.* **31**, 359 (2005).
- [10] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. *Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1989.

# Верность принципу Лапласа

Р. Р. Запатрин<sup>a\*</sup> и Г. Н. Парфёнов<sup>b†</sup>

<sup>a</sup> Отдел Информатики, Государственный Русский Музей,  
Инженерная 4, 191186 Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup> Кафедра высшей математики, Государственный Университет  
Экономики и Финансов, канал Грибоедова 30/32, 191023  
Санкт-Петербург, Россия

Показывается, каким образом, лежащий в основе классического определения вероятности, принцип равновозможности Лапласа может быть распространён на несимметричные объекты. Установлена связь этого принципа с энтропийными идеями Больцмана и Шеннона. Рассмотрено его обобщение на основе относительной энтропии Сэвиджа и меры расхождения Кульбака-Лейблера.

Общепринятое, колмогоровское определение вероятности [1], является аксиоматическим и не позволяет вычислять вероятности даже в случае конечного числа возможных исходов. Таким образом, при недостаточной информации о распределении у нас нет никаких оснований присваивать вероятностям исходов то или иное значение. Выход из этого положения был предусмотрен ещё Лапласом [2, 3]: если *нет оснований* предпочитать один исход другому, следует считать все исходы опыта равновероятными. Такая рекомендация моментально приводит к классической формуле вычисления вероятности:

$$p = \frac{m}{n}$$

оперирующей лишь с числом благоприятных и общим числом исходов.

Прибегая к лапласову принципу «недостаточности оснований», мы, парадоксальным образом, получаем *знание из незнания*. Знание черпается из априорного предположения о полной симметрии исходов. Только ли *симметрия* исходов может выступать в качестве априорного предположения?

---

\*E-mail: Roman.Zapatrin@gmail.com

†E-mail: gogaparf@gmail.com

## 1. От симметрии к правдоподобию

Рассмотрим характерный пример, в котором в качестве априорного знания выступает значение какого-либо из параметров распределения.

Бросается игральная кость. Что можно сказать о законе распределения граней, если априори известно  $m$  – среднее число выпавших очков? На роль ответа может претендовать любое из распределений  $\{p_k\}$ , удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{k=1}^6 k \cdot p_k = m$$

Это уравнение разрешимо лишь тогда, когда  $1 \leq m \leq 6$ . Крайние случаи  $m = 1$  и  $m = 6$  являются вырожденными, в этих (и только этих) ситуациях знание среднего значения позволяет однозначно восстановить распределение. В остальных же случаях такое уравнение имеет бесконечно много решений. Попытаемся разрешить эту неопределенность следуя рецепту Лапласа, т.е. полагая

$$p_1 = \dots = p_6$$

Такая попытка приводит к успеху только в случае, когда  $m = 3, 5$ :

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Обратим внимание, что и в этом случае уравнение, связанное с математическим ожиданием имеет бесконечно много решений. Принцип Лапласа являет собой лишь некий способ выбора одного из этого бесчисленного множества решений.

Нетрудно понять, что гипотеза равновероятности исходов теряет свою состоятельность в случае любого другого априорного предположения о значении  $m$ . Как поступать в таких случаях? Какое из распределений разумно предложить в качестве априорного?

Переходя к обсуждению поставленного вопроса, представим себе, что мы собираемся выдвинуть некоторое распределение  $\{p_k\}$  в качестве априорного. Произведем мысленный статистический эксперимент и воспользуемся *законом больших чисел*. Если провести  $n$  опытов, грани кубика выпадут, соответственно,  $n_1, \dots, n_6$  раз, при этом  $n_1 + \dots + n_6 = n$ .

1. Рассмотрим сначала случай, когда относительно кости никаких *предположений не делается*. Тогда результатами такого опыта будут

$6^n$  равновозможных комбинаций граней. Пространство исходов образовано  $n$ -мерными векторами  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , компоненты которых  $\omega_i$  принимают значения от 1 до 6. При этом каждый фиксированный набор частот  $(n_1, \dots, n_6)$  может быть реализован

$$w(n_1, \dots, n_6) = \frac{n!}{n_1! \dots n_6!}$$

способами. Применяя принцип Лапласа, находим их вероятности

$$P(n_1, \dots, n_6) = \frac{w(n_1, \dots, n_6)}{6^n}$$

Апеллируя к закону больших чисел, мы имеем  $n_k \sim p_k \cdot n$ . Применяя, далее, формулу Стирлинга, получаем асимптотику

$$\log P(n_1, \dots, n_6) \sim -n \sum_k p_k \cdot \log p_k - n \log 6$$

содержащую в качестве слагаемого энтропию Больцмана-Шеннона [4].

Для нахождения адекватного априорного распределения  $\{p_k\}$  применим теперь, вместо принципа Лапласа, *принцип максимального правдоподобия*, согласно которому происходит скорее всего то, что имеет наибольшую вероятность.

Таким образом, нахождение наиболее правдоподобного априорного распределения сводится к максимизации  $P(n_1, \dots, n_6)$  при дополнительном условии  $n_1 + \dots + n_6 = n$ . Нетрудно понять, что решением этой задачи является набор частот  $n_k \sim n/6$ , что находится в полном соответствии с классическим определением вероятности.

**2.** Применим ту же самую схему рассуждений к случаю, когда *априори предполагается*, что средний выигрыш составляет  $m$ , однако каких-либо *иных* предположений *не делается*. В этом случае исходами повторных испытаний будут *уже не все*  $6^n$  равновероятных комбинаций, а лишь те из них, которые асимптотически удовлетворяют балансовому соотношению:

$$1 \cdot \frac{n_1}{n} + \dots + k \cdot \frac{n_k}{n} \sim m$$

вытекающему из закона больших чисел для математического ожидания. При этом, никаких оснований предпочитать какую-либо из таких комбинаций – нет.

Обозначая  $D_n$  асимптотику числа решений балансового уравнения, находим приближенные значения вероятностей соответствующих наборов частот

$$P(n_1, \dots, n_6) \sim \frac{w(n_1, \dots, n_6)}{D_n}$$

Отсюда, точно так же, получаем

$$\log P(n_1, \dots, n_6) \sim -n \sum_k p_k \cdot \log p_k - \log D_n$$

Для нахождения априорных вероятностей остается решить задачу на максимум энтропии:

$$-\sum_k p_k \cdot \log p_k \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_6 = 1 \\ 1 \cdot p_1 + \dots + k \cdot p_k = m \end{cases}$$

Решением такой задачи является хорошо известное в статистической физике, распределение Гиббса [5, 6]:

$$p_k = \frac{e^{-\beta k}}{Z}$$

где нормирующий делитель  $Z$  есть известная в статистической физике статистическая сумма

$$Z = \sum_k e^{-\beta k}$$

а лагранжев множитель  $\beta$  находится из второго уравнения.

В случае среднего значения  $m = 3,5$  распределение Гиббса равномерно. Решая эту задачу для  $m = 4$ , приходим к  $\beta = 0.371049$  и следующим вероятностям:

$$\{p_1, p_2, \dots, p_6\} = \{0.3474, 0.2397, 0.1654, 0.114, 0.07877, 0.05435\}$$

Таким образом, мы видим, что принцип максимального правдоподобия является естественным продолжением принципа недостаточности оснований Лапласа. Он вытекает прямо из него путем отбрасывания тех равновероятных исходов испытаний, которые асимптотически несовместимы с дополнительным априорным предположением.

## 2. Принцип Лапласа с точки зрения Больцмана и Шеннона

Кажется парадоксальным, что принцип равновероятности приводит к неравномерному распределению. В действительности никакого парадокса здесь нет: равновероятными в наших рассуждениях считались не выпадения *граней* кости, а исходы повторных испытаний. На первый взгляд, и это утверждение кажется сомнительным, поскольку вероятность любого исхода  $\omega$ , отвечающего набору частот  $(n_1, \dots, n_6)$  при заданном априорном распределении вероятностей  $\{p_k\}$  граней, равна

$$P(\omega) = p_1^{n_1} \dots p_6^{n_6}$$

и такие вероятности, вообще говоря, различны для разных наборов частот. Это так, однако с ростом числа испытаний поведение этих вероятностей подчинено теореме Шеннона-Мак-Миллана-Бреймана [7] об асимптотической эквивалентности неравновероятных возможностей равновероятным.

Мысль о том, что общий случай неравновероятных возможностей асимптотически сводится к случаю равновероятных, принадлежит Л. Больцману, который впервые получил статистическую формулу для энтропии. Применительно к нашему примеру теорема Шеннона звучит следующим образом.

*Пространство  $6^n$  реализаций, отвечающих  $n$  бросаниям несимметричной игральной кости можно разбить на два множества  $A_n$  и  $B_n$  так, что*

1) *Суммарная вероятность реализаций множества  $A_n$  пренебрежима:*

$$P(A_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

2) *Реализации исходов множества  $B_n$  асимптотически равновероятны:*

$$\frac{\log P(\omega) - \log P(\omega')}{\log P(\omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \omega, \omega' \in B_n, \quad n \rightarrow \infty$$

Таким образом, принцип недостаточности оснований справедлив асимптотически, а его применение равносильно принципу максимума энтропии.

### 3. Априории и энтропия Сэвиджа

Энтропийные соображения позволяют продвинуть Лапласовские априорные предположения значительно дальше простой идеи симметрии. Обсудим это, оставаясь в рамках все того же примера с кубиком.

Пусть  $\{q_k\}$  некоторое априорное, уже *не обязательно равномерное* распределение граней кубика. Если провести  $n$  опытов, вероятности распределений граней кубика будут подчинены полиномиальному закону:

$$P(n_1, \dots, n_6) = \frac{(n_1 + \dots + n_6)!}{n_1! \dots n_6!} \cdot q_1^{n_1} \dots q_6^{n_6}$$

Для апостериорной оценки частот мы снова применим принцип максимального правдоподобия. Тогда, наиболее правдоподобное распределение  $p_k = n_k/n$  относительно априорной гипотезы  $q_k$  получается путем максимизации выражения  $P(n_1, \dots, n_6)$ .

Выражение для для оценки правдоподобия подвергнем стандартным упрощениям. Применяя формулу Стирлинга, приходим к выражению

$$\log P(n_1, \dots, n_6) \sim -n \cdot \sum_k p_k \cdot \log \frac{p_k}{q_k}$$

Выражение

$$I[p : q] = \sum_k \log \frac{p_k}{q_k} \cdot p_k$$

называется *относительной энтропией* Сэвиджа [5, 8] или *мерой расхождения распределений* Кульбака-Лейблера [9]. Известно, что эта мера неотрицательна и равна нулю лишь в случае совпадения распределений. Таким образом, наиболее вероятное распределение оказывается наиболее близким к априорному.

В частном случае, когда априорная гипотеза – полная симметрия, относительная энтропия Сэвиджа равна отклонению Шенноновой энтропии  $H(p)$  от ее максимально-возможного значения:

$$\sum_{k=1}^6 \log \frac{p_k}{1/6} \cdot p_k = \log 6 - H(p)$$

Таким образом, метод максимального правдоподобия шире и не требует, чтобы в качестве нулевой гипотезы выдвигалось предположение о полной симметрии.

Относительная энтропия может быть определена для любой пары вероятностных распределений  $\mu_0, \mu_1$  по формуле [8]–[11]:

$$I[\mu_1 : \mu_0] = \int f_1 \cdot \log \frac{f_1}{f_0} d\lambda$$

где  $f_i$  – плотности распределений  $\mu_i$  относительно подходящей «считающей» меры  $\lambda$ , то есть:  $d\mu_i = f_i \cdot d\lambda$ . Указанный интеграл от выбора считающей меры не зависит, всегда существует и неотрицателен. При этом, необходимым (но не достаточным) условием его конечности является взаимная абсолютная непрерывность распределений.

Один из авторов (Р.Р.З.) выражает благодарность РФФИ (грант No. 07-06-00119-а) за поддержку работы.

## Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей*. М.: Наука, 1973.
- [2] P. S. Laplace. *Théorie analytique des probabilités*. Paris, 1820.
- [3] Edwin Thompson Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Р. Л. Стратонович. *Теория информации*. М.: Наука, 1975.
- [5] А. Исихара. *Статистическая физика*. Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
- [6] A. Wehrl. *General properties of entropy*. Reviews of Modern Physics, **50**, 221–260 (1978).
- [7] А.С. Холево *Введение в квантовую теорию информации*. М.: МЦ-НМО, 2002.
- [8] B. Schumacher, M. Westmoreland. *Relative entropy in quantum information theory*. Quantum Computation and Quantum Information: A. Millenium, S. Lomonaco, editor (American Mathematical Society Contemporary Mathematics series, 2001); arXiv:quant-ph/0004045.
- [9] S. Kullback. *Information theory and statistics*. New York, Dover, 1968.
- [10] N. Hadjisavvas. *The Maximum Entropy Principle as a consequence of the principle of Laplace*. J. Stat. Phys. **26**, 807–815 (1981).
- [11] G. Parfionov, R. Zapatrin. *‘Lazy’ quantum ensembles*. – Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**, 10891–10900 (2006), eprint quant-ph/0603019.



# Theologia naturalis на рубеже III тысячелетия

Протоиерей Кирилл Копейкин\*

*Санкт-Петербургская духовная академия,  
Санкт-Петербург, Россия*

В работе показывается, что по мере развития науки, по мере углубления наших знаний о мире, представления о Боге все более возвышались, очищаясь от всего второстепенного, связанного с ограниченностью прежних воззрений. Бог перестал играть служебную роль универсального объяснения всего непонятого. Одновременно с этим произошло углубление понимания того, каким образом промысел Божий может осуществляться не через нарушение «законов природы», а посредством их самих. Сегодня, на рубеже III тысячелетия, само развитие науки помогает обрести – уже на ином уровне – новую целостность веры и знания.

Как известно, предтеча современной науки, – наука средневековья, – изначально возникла как *theologia naturalis*, как попытка познать Творца через изучение Его творений [1]. Главная же цель новоевропейской науки – преодоление последствий грехопадения: необходимости со скорбью питаться от земли и в поте лица есть хлеб свой (Быт. 3, 17–19) и утраты после Вавилонского столпотворения взаимопонимания (Быт. 11, 6–8), забвения того райского языка, что позволял Адаму нарекать имена твари (Быт. 2, 19) [2], [3]. Хитроумные механизмы облегчают бремя труда, технические приспособления позволяют искусно обманывать природу. Универсальный же язык науки – это язык математики, являющийся, по убеждению Галилея, тем языком, на котором написана Книга Природы [4].

К началу XX века казалось, что «храм науки», прообразом которого был бэконовский Дом Соломонов, уже почти достроен. Мир тогда представлялся исследователям совершенным механизмом, состоящим из мельчайших, точно пригнанных друг к другу «деталей»; для

---

\*E-mail: kirill.kopeykin@mail.ru

Бога места в таком мире просто не оставалось. Правда, относительно некоторых «частностей» его устройства еще оставались определенные неясности, но их, как тогда мнилось исследователям, несложно было устранить. И вот тогда, когда, как мнилось исследователям, мир «в основном» уже был познан, ситуация радикально переменялась [5].

Как утверждает А. П. Огурцов, XX век был веком физики. «Он начался с открытия радиоактивности и завершился попытками построения физики как Теории Всего» [6]. В начале XX столетия появились теория относительности и квантовая механика. Выдающийся физик XIX века О. Д. Хвольсон, оценивая открывающиеся перспективы новой физики, на рубеже столетий писал: «Если основы этого учения утвердятся в науке и когда-либо сделаются достоянием всех образованных людей, то это составит такой глубочайший переворот во всех наших основных представлениях, какого еще не было в истории человечества. Он далеко оставит за собою тот переворот, который был вызван переходом от геоцентрической картины мира к картине гелиоцентрической» [7]. И эти теории, перевернувшие наши представления о мире, родились из исследования парадоксальных, не укладывающихся в рамки обыденных представлений свойств света.

Как показала специальная теория относительности, пространство и время представляют собою единое четырехмерное многообразие. Кроме того, специальная теория относительности установила единство пространственно-временной и причинно-следственной структуры мира [8]–[10]. Таким образом, специальная теория относительности подтверждает представление средневековых теологов о том, что свет есть начало телесности [11], – телесности, понимаемой как способ отношения одной части мира к другой. Фактически, специальная теория относительности свидетельствует в пользу мнения позднеантичных и средневековых мыслителей о том, что свет является той границей, которая отделяет – и при этом соединяет – мир видимый и невидимый, тело и душу, чувственно воспринимаемое и умопостигаемое, естественное и сверхъестественное, одновременно принадлежа обоим мирам [12]. Это позволило впоследствии В. Гейзенбергу заметить, что «в естествознании Нового времени живет христианская модификация платонической “мистики света”, которая отыскивает в первообразах единую основу духа и материи и предоставляет место для разнообразных степеней и видов понимания вплоть до познания истины спасения» [13]. Сам он всегда «противился тому, чтобы считать физическое значение слова “свет” единственным собственным значением, а все остальные объявлять пе-

реносными. Я был бы склонен поэтому думать, – говорил Гейзенберг, – что это ощущение нефизического света как-то способствовало изобретению венца вокруг головы святых» [14].

Общая теория относительности показала, что пространство и время являются не просто «вместилищем» абсолютно внешних по отношению к ним событий, но сами изменяются под влиянием в них происходящего. Радикальное изменение представлений о пространстве и времени привело к кардинальному пересмотру представлений о Вселенной [15]. В общей теории относительности оказалась не только возможной, но и естественной постановка вопроса о динамике самого пространства-времени Вселенной [16]. В связи с этим возникла космология как наука о происхождении и развитии крупномасштабной структуры Вселенной. Космология впервые начала изучать не общее закономерное, а исключительное, особое, уникальное, поскольку Вселенная является уникальным и единственным «объектом». Кроме того, впервые объектом изучения стал непрестанно меняющийся, постоянно эволюционирующий «объект». Таким образом, через космологию в физику пришла идея эволюции. Космическую эволюцию англиканский священник и биохимик Артур Пикок называет «Книгой Бытия для третьего тысячелетия»; по его убеждению современная теология, стремящаяся связать Бога со всем сущим, непременно должна учитывать эволюционную перспективу [17]–[19].

Если прежде в науке существовал неявный запрет на обращение к проблеме первоначала, то космология натолкнулась на исходную сингулярность, отсылающую к идее творения. Причем, чем ближе мы подходим к исходной сингулярности, тем более значимой становится метафизическая – а в пределе и теологическая – основа космологических моделей [20]. Правда, многие космологи пытаются избежать религиозных коннотаций, но все-таки рядом физиков признаётся, что Большой взрыв есть, фактически, творение из ничего.

По мере развития космологии, выяснилось, что существует поразительное соответствие человека и вселенной, получившее наименование антропного принципа [21], [22]. Суть его состоит в том, что параметры Вселенной удивительно точно соответствуют тому «окну», в котором только и возможно существование человека. Возникает впечатление, что появление человека было предусмотрено при творении вселенной, что обращает нас к телеологии [23].

В начале XX века в связи с так называемой «революцией в физике» с особой остротой встал вопрос о природе физической реальности. Преж-

няя, классическая физика, базировалась на убежденности в том, что она изучает «объективно существующий» мир, свойства объектов которого существуют «сами по себе», независимо от факта наблюдения, и влияние наблюдения на исследуемую систему можно сделать сколь угодно малым. На грани столетий это, казалось бы, естественное предположение, подверглось сомнению. Целым рядом авторитетных физиков, наиболее известным из которых был, пожалуй, Эрнст Мах, было выдвинуто утверждение, что физика имеет дело лишь с упорядоченными комплексами субъективных ощущений. Мах полагал, что в мире не существует ничего, кроме «ощущений» и связей между ними; он перенёс акцент с отражения внешнего мира человеческим сознанием на активную организацию им чувственных ощущений. Научное познание мира, по его убеждению, состоит из простейшего возможного описания связей между «ощущениями», которые Мах предпочитал называть более нейтрально «элементами». Такое познание достигается посредством все более полного «согласования одних мыслей с другими». Это и есть формулировка Маха его знаменитого «принципа экономии мышления». Отсюда следовало, что законы физики относятся скорее к нашему сознанию, нежели к объективно существующему миру [24].

Вопрос о природе физической реальности встал в начале XX столетия в связи с тем, что, как сказал Гейзенберг в докладе «Роль физики элементарных частиц в развитии современного естествознания», прочитанном им в 1974 году на заседании Шведской Академии наук, «физика ... информирует нас, строго говоря, о фундаментальных структурах природы, а не о фундаментальных частицах» [25]. Дело в том, что суть принятого на вооружение новоевропейской наукой «объективирующего» метода познания состоит в том, что исследователь природы описывает мир не по отношению к человеку (что неизбежно вносило бы момент «субъективности»), а по отношению «к самому себе», точнее, описывает отношение качеств одного выделенного «элемента» мироздания к другому [26]. Вместо познания сущности вещей (а именно такова была претензия античных и средневековых мыслителей), естествоиспытатель Нового времени ограничился описанием отношений их качеств. При этом одно неизвестное соотносится с другим так, что сущность изучаемых объектов, т.е. сам способ их бытия, как бы «выносится за скобки», а в качестве «сухого остатка» остается лишь «форма» взаимоотношения их качеств, именуемая «объективно измеримой величиной».

Языком, позволяющим описывать обнаруживаемые в мире структурные закономерности, именуемые «законами природы», является

язык математики. Удобство математического языка заключается именно в его формальности: одно и то же уравнение способно описывать множество разнообразных, относящихся к разным «уровням» бытия процессов. Однако, оборотной стороной этого «формального удобства» оказывается то, что формальная теория открыта для смыслового наполнения. В классической физике это не вызывало затруднений; считалось, что установление связи математических величин с реальными вещами – задача «самоочевидная». В современной физике – иначе; проникая в область, далёкую от нашего обыденного опыта, например, в сферу микромира, мы утрачиваем возможность наполнить формальную математическую модель интуитивно понятным смыслом, дать ей содержательную интерпретацию.

Использование угаданного формально-математического языка квантовой механики вызвало целый ряд трудностей. Прежде всего, было непонятно, какая же, собственно, реальность соответствует формально-математически вводимому понятию вектора состояния и к чему именно относятся предсказываемые теорией вероятности. Самым же главным, как уже было сказано, остался вопрос об онтологическом статусе квантовой теории. «Объективирующий» подход привел к тому, что и сейчас, почти столетие спустя после создания квантовой механики, не утихают споры о возможных способах её интерпретации, – ведь формальная теория открыта для смыслового наполнения, а способов различить интерпретации исходя лишь из «внутренних», «формальных» соображений, нет. Все интерпретации приводят – или, по крайней мере, должны приводить – к одинаковым экспериментальным следствиям, в противном случае они были бы не различными интерпретациями, но различными теориями; различие в интерпретациях принадлежит области метафизики – сфере, так сказать сверхъестественнонаучной [27].

Много размышлял на проблемах интерпретации квантовой механики и А. А. Гриб [28], [29]. Тщательно проанализировав процесс квантовомеханического измерения он показал, что представление о том, что «истинным наблюдателем» квантовомеханического процесса является «сам» прибор «не имеет никакого подтверждения в аппарате квантовой механики и является просто эмоциональным убеждением» [30]. Получается, что наблюдающий мир субъект влияет на реальность самим актом своего личного присутствия. Это заставляет радикальным образом пересмотреть наши воззрения на место человека во Вселенной [31]. Действительно, если когда-то, в момент большого взрыва, всё вещество, ныне рассеянное в громадных просторах вселенной, было сосредоточено

в ничтожно малом объёме «космического яйца», где были существенны квантовые корреляции, то теперь эти корреляции должны продолжать существовать и на макроскопических – космических – расстояниях. Тогда, наблюдая квантовые объекты в одной части вселенной, мы, в силу наличия таких корреляций, оказываем влияние и на другие её части. Пожалуй, наиболее вышукло это сформулировал Джон Арчибальд Уилер в работе «Квант и вселенная»: «Пока мы не увидим квантовый принцип во всей его простоте, мы может считать, что не знаем самого главного о Вселенной, о нас самих и о нашем месте во Вселенной, – настаивает он – ... нет ничего более странного, чем место, которое он <квантовый принцип> предоставляет наблюдателю для участия в создании реальности. Тот, кто думает о себе просто как о наблюдателе, оказывается участником. В некотором странном смысле это является участием в создании Вселенной. В этом состоит центральный вывод для проблемы “квант и Вселенная”, хотя мы сегодня далеки от того, чтобы видеть, как разобраться в ней. “Этот квантовый вопрос так невероятно важен и труден, – писал Эйнштейн Лаубу в 1908 г., – что каждый должен им заниматься”». «Порождая на некотором ограниченном этапе своего существования наблюдателей-участников, не приобретает ли в свою очередь Вселенная посредством их наблюдений ту осязаемость, которую мы называли реальностью? Не есть ли это механизм существования?» – вопрошает Уилер. По его мнению, воспринимая мир «наблюдатель здесь и сейчас участвует в образовании ранней Вселенной, хотя это представляет собой обращение обычного хода времени» [32].

Квантовая механика показала, что некоторые (дополнительные) из объективно измеряемых при помощи приборов параметров (таких, например, как координата или импульс), приписываемых микрообъектам, вовсе не являются «объект(ив)ными» в обыденном смысле этого слова, т. е. существующими независимо от наблюдателя и от того, производится ли измерение, но представляют собою «эффект», обусловленный определенной экспериментальной ситуацией, «возникают» в сам момент наблюдения и не существуют вне его, «сами по себе», (это было проверено в целой серии экспериментов по проверке нарушения неравенств Белла [33], [34]).

«Априорное несуществование» некоторых «объективных» параметров впервые было продемонстрировано в работе Эйнштейна, Подольского и Розена с описанием знаменитого ЭПР-парадокса [35]. Академик В. А. Фок называл взаимодействие, наличием которого обусловлено ЭПР-парадокс, «не-силовым», и сравнивал его с взаимодействием

человеческих личностей – взаимодействием не физическим, но психическим [36], [37].

Сравнить материальные частицы с живыми организмами – для физика смелость необычайная. Но интересно, что уже в 1919 году Чарльз Галтон Дарвин, одним из первых начавший поиски логически последовательных основ квантовой механики, в своей (оставшейся неопубликованной и ныне хранящейся в Библиотеке Американского философского общества) статье «Критика основ физики» писал: «Я давно уже считал, что фундаментальные основы физики находятся в ужасном состоянии. ... Может случиться, что потребуются фундаментально изменить наши представления о времени и пространстве, ... либо даже в качестве последней возможности приписать электрону свободу воли» [38], [39].

Отметим, что сколь ни парадоксальной выглядит мысль о наличии у материи жизни, для христианского сознания она, по существу, вполне естественна. «Слишком часто мы, по привычке, по инерции, по лени ума, не только неверующие, но и верующие, думаем о материи, будто она инертна, мертва. И действительно, с точки зрения нашего субъективного опыта, это большей частью так. Но с точки зрения философии материи, с точки зрения ее соотношения с Творцом, Который державным словом ее призвал из небытия к бытию, это не так: все, Богом сотворенное, имеет жизнь, – настаивает митрополит Сурожский Антоний, – не то сознание, которым мы обладаем, а иное: в каком-то смысле все, Богом сотворенное, может участвовать радостно и ликующе в гармонии твари. Иначе, если бы материя была просто инертна и мертва, то всякое Божие воздействие на нее было бы как бы магическим, было бы насилием; материя не была бы послушна Ему, те чудеса, которые описаны в Ветхом Завете или в Новом Завете, не были бы чудесами, то есть делом послушания и восстановления утраченной гармонии. Это были бы властные действия Бога, против которых материя, сотворенная Богом, не могла бы ничего. И это не так. Всё сотворенное живет, на каждом уровне тварной жизни, своей особенной тварностью. И если мы могли бы в нашем очень часто холодном, тяжелом, потемневшем мире уловить то состояние материи, которое нам больше недоступно, потому что мы ее видим не Божиими глазами и не изнутри духовного опыта, мы видели бы, что Бог и всё Им сотворенное связаны живой связью» [40]. Утверждение факта пронизанности материи жизнью вовсе не означает примитивного языческого гилозоизма, напротив, это есть естественное следствие тварности мира, его не-само-бытности, его укорененности в бытии Творца. Тварность мира означает что вся тварь жива в меру

своей со-причастности Жизни Творца. Именно потому что мир связан с Богом, с самой Жизнью, он и о-живо-творен, жив, – не сам по себе, но в силу наличия этой связи, без которой ничто тварное просто не может существовать.

Квантовая механика показала, что случайность неотъемлемо присуща самой природе мироздания. Примечательно, что с точки зрения волонтактивной теологии, сыгравшей огромную роль среди духовных предпосылок научной революции XVII века, верховная причина любого бытия – всемогущая, ничем не детерминированная воля Творца, а потому случайность – это просто иное наименование Божественной Воли, ибо всемогущество по существу означает индетерминированность. Любопытно, отмечает А. Гоманьков, что «в дальнейшем, однако, эта идея отстаивалась, в основном, философами-атеистами XIX в., опиравшимися на концепцию лапласовского абсолютного детерминизма, – Л. Фейербахом (“Сущность христианства”), М. А. Бакуниным (“Федерализм, социализм и анти-теологизм”). Их логика была примерно такой. Бог – синоним случайности. Мир устроен закономерно, в нем нет ничего случайного. Следовательно, Бога нет. Основная критика этого силлогизма со стороны христианских богословов XIX–XX вв. была направлена против его первой посылки (см., например, у о. Александра Ельчанинова: “Нет ничего случайного на свете, тот, кто верит в случай – не верит в Бога”), тогда как на самом деле неверной является вторая» [41]. Обнаруживаемая квантовой механикой неотъемлемо присущая миру случайность открывает своего рода «природный зазор» для действия божественного промысла. Показательно, что в работе «2400 лет квантовой теории» один из её создателей лауреат Нобелевской премии Эрвин Шредингер связывал возникновение атомистики (атомистики как предварения квантовой теории) с первыми попытками разрешить, как ее называет Шредингер, «угнетающую антиномию»: «как сочетать свободу воли, требуемую нравственной ответственностью, со строгими закономерностями природы?» [42], а сэр Артур Эддингтон говорил: «религия стала возможна и для физика после 1927 года» (год сольвеевского конгресса в Копенгагене, когда квантовая механика обрела окончательную форму) [43].

\*\*\*

Итак, подводя итог сказанному, можно констатировать, по мере развития науки, по мере углубления наших знаний о мире, представления о Боге все более возвышались, очищаясь от всего тварного и второстепенного, связанного с ограниченностью прежних воззрений. Бог, по



выражению авторитетного католического историка науки Эрнана Мак-Маллина, перестал быть «Богом белых пятен», играющим служебную роль универсального объяснения всего непонятного, и стал, если так можно выразиться, ещё более сверхъестественным [44]. Одновременно с этим произошло углубления понимания того, каким образом промысел Божий может осуществляться не чрез нарушение «законов природы», а посредством их самих. Сегодня, на рубеже III тысячелетия, само развитие науки помогает обрести – уже на ином уровне – новую целостность веры и знания. «Не так уж мало важно то, что думают физики, – говорил в начале XX столетия В. Паули, – ведь именно узость ... идеала объективного мира, существующего в пространстве и времени по закону причинности ... вызвала конфликт с духовными формами различных религий. И если само естествознание ломает эти узкие рамки – как оно это сделало в теории относительности и в ещё большей мере способно сделать в квантовой теории ... , – то соотношение между естествознанием и тем содержанием, которое хотят охватить своими духовными формами религии, начинает выглядеть опять-таки иначе. ... В будущем ... наука ... будет не только терпимее к различным формам религии, но сможет, пожалуй, полнее рассматривая целое, обогатить и мир ценностей» [45]. Примечательно, что сам Планк, с открытия которого, по-существу, началась эра новой физики, свой доклад «Религия и естествознание», прочитанный в 1937 году в Дерптском (Тартуском) университете, завершил такими словами: «Следует неутомимо и непрестанно продолжать борьбу со скептицизмом и догматизмом, с неверием и суеверием, которую совместно ведут религия и естествознание, а целеуказующий лозунг в этой борьбе всегда гласил и будет гласить: к Богу!» [46]. Гейзенберг, продолживший начатую Планком «квантовомеханическую революцию», также пытался включить квантовую физику в такую целостную картину мира, которая обладала бы ценностным измерением. Он утверждал, что «существо науки ... составляет область чистой науки, которая не связана с практическими применениями. В ней, если можно так выразиться, чистое мышление пытается познать скрытую гармонию мира. В этой сокровенной области, где наука и искусство едва ли могут разделяться, может быть, есть место и современному человечеству, которое найдет здесь чистую истину, не затемненную своей идеологией и своими желаниями. ... В прежние времена люди по-разному говорили об этой центральной области; они употребляли понятия “смысл” или “Бог” или прибегали к сравнению, звукам, картинам. Имеется много путей к этому центру и в наши дни, и наука – только

один из них. Однако в настоящее время может быть, вообще нет общепринятого языка, на котором мы могли бы понятно для всех говорить об этой области; поэтому-то многие о ней ничего не знают. Но от этого существо дела не меняется; мировой порядок, как и в прежние времена, может определяться только этой областью через посредство тех людей, для которых открыт доступ в неё» [47]. Чистая наука как «центральная часть» всего знания, подобна алтарю храма, ибо она прикасается к сфере «центрального порядка», обнаруживая гармоническую структуру и целостность мироздания, и сила, исходящая из этой области, будет направлена ко благу, если учёный, как настаивал Гейзенберг, станет ещё и священником и будет действовать во имя божественного начала [48].

**Благодарности.** Автор благодарит проф. А. А. Гриба за многочисленные глубокие и плодотворные дискуссии по данной проблематике.

## Список литературы

- [1] Философия религии: Альманах / Ин-т философии РАН /2006–2007/ Под ред. В. К. Шохина. 2007. Ч. III. Из истории естественной теологии. С. 226–336.
- [2] А. В. Ахутин. *Понятие “природа” в античности и в Новое время (“фюсис” и “натура”)*. М.: Наука, 1988.
- [3] Д. Л. Сапрыкин. *Политико-теологический и юридический контекст ранней новоевропейской философии науки*. // Философия науки в историческом аспекте. Сборник статей в честь 85-летия Н. Ф. Овчинникова. СПб.: РХГИ; ИД СПбГУ, 2003. С. 47–72.
- [4] Г. Галилей. *Пробирных дел мастер* / Пер. Ю. А. Данилова. М.: Наука, 1987.
- [5] А. А. Гриб. *Современная физика и религиозное откровение // Два града. Диалог науки и религии: Восточно- и Западноевропейская традиции*. / Сост. и ред. В. Н. Катасонов. Калуга: Издательство Н. Бочкарёвой, 2002. С. 181–207.
- [6] А. П. Огурцов. *Судьба метафизики в век физики // Метафизика. Век XXI. Сборник трудов / Сост. и ред. Ю. С. Владимиров. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. С. 20.*

- [7] О. Д. Хвольсон. *Курс физики*: В 5 т. Т. 1. Изд. 5-е. Берлин: Р.С.Ф.С.Р. Государственное издательство, 1923. С. 10.
- [8] А. Д. Александров. *Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени* // *Философские вопросы современной физики* / Под ред. И. В. Кузнецова и М. Э. Омеляновского. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 269–323.
- [9] А. К. Гуц. *Семинар «Хроногеометрия» Новосибирского университета и исследования по основам теории относительности* // Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы / Отв. ред. Г. М. Идлис, акад. О. А. Ладыженская. Сост. Г. М. Идлис. М., Наука, 2002. С. 106–119.
- [10] Р. И. Пименов. *Основы теории темпорального универсума* / Под ред. А. В. Журба. Вступ. ст. Н. А. Громова. Изд. 2-е, стереотипное. М.: ЛЕНАНД, 2006.
- [11] Р. Гроссетест. *О свете, или О начале форм*. Пер. и комм. А. М. Шишкова // *Знание и традиция в истории мировой философии: Сборник статей*. М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2001. С. 173–195.
- [12] А. М. Шишков. *Вопрос о соединении души с телом в позднеантичной и средневековой мысли* // Богословская конференция Русской Православной Церкви «Учение Церкви о человеке». Москва, 5–8 ноября 2001 г. Материалы. М.: Синодальная Богословская Комиссия, 2002. С. 203–210.
- [13] В. Гейзенберг. *Философские взгляды Вольфганга Паули* // Гейзенберг В. Избранные философские работы: Шаги за горизонт. Часть и целое (Беседы вокруг атомной физики) / Пер. А. В. Ахутина, В. В. Бибихина. СПб.: Наука, 2006. С. 216.
- [14] В. Гейзенберг. *Часть и целое* // Гейзенберг В. Избранные философские работы: Шаги за горизонт. Часть и целое (Беседы вокруг атомной физики) / Пер. А. В. Ахутина, В. В. Бибихина. СПб.: Наука, 2006. С. 408.
- [15] A. A. Grib. *Gauss, Dostoevsky, Einstein and adventures of non-Euclidean geometry*. IMECC RP76/96, Campinas, Brazil, 1996.
- [16] A. A. Grib. *The problem of the Beginning of the Universe*. // *Замысел Бога в теориях космологии – God's design in Cosmological Theories* / Отв. ред. А. Н. Павленко. М.–СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2004. С. 11–22.

- [17] А. Пикок. *От науки к Богу. Новые грани восприятия религии* / Пер. К. Савельева. М.: ФАИР-ПРЕСС, 2002.
- [18] А. Пикок. *Теология перед лицом эволюции: вызов и стимул* // Много миров. Новая Вселенная, внеземная жизнь и богословский подтекст / Ред. С. Дж. Дика, пер. В. Л. Олейника. М.: АСТ; Астрель, 2007. С. 113–140.
- [19] А. А. Grib. *Friedmann, Lemaitre and basic ideas of modern cosmology*. Proceed. of 4 Alexandre Friedmann Intern. Seminar on Gravitation and Cosmology, St.Petersburg, Campinas, 1999. С. 119–130.
- [20] Свящ. Димитрий Кирьянов. *Метафизические предпосылки моделей квантовой космологии* // [http://slovo.iphil.ru/fitlab/Kiryarov\\_metafizkvant](http://slovo.iphil.ru/fitlab/Kiryarov_metafizkvant)
- [21] Б. Картер. *Совпадение больших чисел и антропологический принцип в космологии* // Космология. Теория и наблюдение. М.: Мир, 1978. С. 369–380.
- [22] А. Н. Павленко. *Современная космология: Основания эпистемологического поворота*. М.: Интрада, 1997.
- [23] А. А. Гриб. *Значение антропного принципа в космологии* // Страницы. Богословие, культура, образование. Журнал Библейско-богословского института св. ап. Андрея Первозванного. 2000, № 5, вып. 3. С. 430–439.
- [24] Дж. Холтон. *Мах, Эйнштейн и поиск реальности* // Холтон Дж. Тематический анализ науки / Пер. с англ. Общ. ред. и послесл. С. Р. Микулинского. М.: Прогресс, 1981. С. 73–119.
- [25] В. Гейзенберг. *Роль физики элементарных частиц в развитии современного естествознания* // Гейзенберг В. Избранные философские работы: Шаги за горизонт. Часть и целое (Беседы вокруг атомной физики) / Пер. А. В. Ахутина, В. В. Бибикина. СПб.: Наука, 2006. С. 97.
- [26] Прот. Кирилл Копейкин. *Христианские корни и эсхатологические перспективы современной науки* // Наука – философия – религия: в поисках общего знаменателя / Отв. ред. П. П. Гайденок, В. Н. Катасонов. М.: ИФ РАН, 2003. С. 25–51.
- [27] В. D'Espagnat. *Veiled Reality, An Analysis of Present-Day Quantum Concepts*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1995.

- [28] А. А. Гриб. *Методологическое значение квантовой теории для психологии* // Квантовая механика и теория относительности / Под ред. П. П. Павинского и А. М. Мостепаненко. Л., Изд-во ЛГУ, 1980. С. 130–145.
- [29] A. A. Grib. *On the problem of the role of consciousness in quantum physics*. Campinas, Brasil, 1999. IMECC prepr. RP11/99.
- [30] А. А. Гриб. *Роль сознания наблюдателя в теории измерения в квантовой механике* // Методологический анализ закономерностей развития математики. М.: Наука, 1989. С. 111.
- [31] A. A. Grib. *Quantum cosmology, the role of observer, quantum logic* // Quantum cosmology and the laws of Nature. Scientific Perspectives on Divine Action. Vatican, 1993. P. 163.
- [32] Дж. Уиллер. *Квант и Вселенная* // Астрофизика, кванты и теория относительности / Пер. с итальянского. Под ред. Ф. И. Фёдорова. М.: Мир, 1982. С. 535–558.
- [33] А. А. Гриб. *Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях*. Успехи физических наук, 1984, т. 142, вып. 4. С. 619–634.
- [34] А. А. Гриб. *Нарушение неравенств Белла и проблема измерения в квантовой теории*. Дубна, 1992.
- [35] A. Grib, W. Rodrigues. *Nonlocality in Quantum Physics*. Kluwer Academic-Plenum Publishers, New York, 1999.
- [36] В. А. Фок. *Замечания к творческой автобиографии Альберта Эйнштейна* // Эйнштейн и современная физика. Сборник памяти А. Эйнштейна. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. С. 83–84.
- [37] А. Д. Александров. *О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике*. Доклады АН СССР, 1952. т. 84. № 2. С. 253–256.
- [38] М. Джеммер. *Эволюция понятий квантовой механики* / Пер. с англ. Под ред. Л. И. Пономарёва. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. С. 173.
- [39] A. Peres. *Quantum inseparability and free will* // Vastakohtien todellisuus. Juhlakirja professori K. V. Laurikaisen 80-vuotispäiväna. Helsinki, 1996. P. 117–121.
- [40] Митр. Антоний Сурожский. *Православная философия материи* // Антоний, митр. Сурожский. Труды. М.: Практика, 2002. С. 102.

- [41] А. Гоманьков. *Идея эволюции в палеонтологии и Священном Писании* // Наука и вера: Материалы научных семинаров. Вып. 6 / Сост. Н. А. Печерская, по ред. А. А. Волковых. СПб.: Изд-во Института «Высшая религиозно-философская школа», 2003. С. 44–45.
- [42] Э. Шрёдингер. *2400 лет квантовой теории* // Шрёдингер Э. Новые пути в физике: Статьи и речи / Ред. Л. С. Фрейман, сост. У. И. Франкфорт. М.: Наука, 1971. С. 114.
- [43] А. А. Гриб. *Квантовый индетерминизм и свобода воли* // Наука и вера в диалоге. П. Тейяр де Шарден и П. Флоренский. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2007. С. 78–102.
- [44] E. McMullin. *Natural Science and Belief in a Creator: Historical Notes* // Physics, Philosophy and Theology: A Common Quest for Understanding. Vatican Observatory – Vatican City State – Notre-Dame. USA, 1988. P. 49–80.
- [45] В. Гейзенберг. *Избранные философские работы: Шаги за горизонт. Часть и целое (Беседы вокруг атомной физики)* / Пер. А. В. Ахутина, В. В. Бибикина. СПб.: Наука, 2006. С. 359–360.
- [46] М. Планк. *Религия и естествознание* / Публикация Н. И. Кузнецовой // Вопросы философии, 1990, № 8. С. 36.
- [47] В. Гейзенберг. *Часть и целое (Беседы вокруг атомной физики)* // Гейзенберг В. Шаги за горизонт / Пер. с нем. Сост. А. В. Ахутина. Общ. ред. и вступ. ст. Н. Ф. Овчинникова. М.: Прогресс, 1987. С. 32.
- [48] В. П. Визгин. *Вернер Гейзенберг о соотношении искусства и науки* // Наука и искусство / Ред. А. Н. Павленко. М.: ИФРАН, 2005. С. 95–120.

# Сверхсветовые перемещения в (полу)классической ОТО

С. В. Красников\*

*Главная (Пулковская) Астрономическая Обсерватория РАН*

Рассматривается возможность сверхсветовых перемещений нетахионных (т. е. движущихся с мгновенной скоростью  $v < c$ ) тел в рамках общей теории относительности. Обсуждается запрет, предположительно налагаемый на такие перемещения квантовой теорией поля. Демонстрируется несостоятельность этого запрета в общем случае.

## 1. Сверхсветовые перемещения

«Скорость тела, состоящего из обычной („нетахионной“) материи не может превышать скорость света». Если под „скоростью“ понимать „мгновенную скорость“, т. е. скорость в точке, то это утверждение *верно*, но *тавтологично* — если найдется тело, летящее быстрее света, его придется назвать тахионом. На практике, однако, под скоростью в данном случае понимается нечто иное (нечто вроде эффективной средней скорости, как мы увидим). Утверждение оказывается *содержательным* и *неверным*.

Считается, что расстояние между Землей и Денебом составляет  $d = 1500$  световых лет. Допустим, корабль сумел долететь от Земли до Денеба за время  $T_1 < 1500$  лет, или — ниже мы увидим, что это совершенно разные допущения — сумел долететь до Денеба и вернуться на Землю за  $T_2 < 3000$  лет (в обоих случаях время измеряется по земным часам). Представляется вполне законным назвать такое перемещение „сверхсветовым“, поскольку  $d/T_1 > c$ . Как мы увидим чуть ниже на конкретных примерах, сверхсветовое — в этом смысле — перемещение возможно, в принципе, даже для тела, движущегося с мгновенной скоростью  $v < c$ . Это связано с природой величины  $d$ : в общем случае в ОТО едва ли можно придать разумный смысл понятию „расстояния

---

\*E-mail: Gennady.Krasnikov@pobox.spbu.ru

между телами“, а когда это оказывается возможным, расстояние вовсе не обязано совпадать с тем, что выше было обозначено  $d$ . Утверждение «расстояние между Землей и Денебом составляет 1500 световых лет» следует, строго говоря, понимать следующим образом. Есть область вселенной  $N$ , включающий в себя часть мировой линии Земли, часть мировой линии Денеба и некоторые из соединяющих их изотропных геодезических. Область эта (приблизительно) плоская и мы можем рассматривать ее и как часть реального пространства-времени (с его, возможно, очень сложной геометрией), и как часть *фиктивного* пространства Минковского, в котором мировым линиям Земли и Денеба соответствуют параллельные прямые. Понятие расстояния между такими прямыми вводится очевидным образом. Именно это расстояние и составляет 1500 световых лет.

Как явствует из вышесказанного, сверхсветовые перемещения удобней обсуждать не в терминах скоростей, а сравнивая реальное пространство-время с пространством Минковского [1].

**Определение.** Пусть  $C$  — времениподобный цилиндр  $\sum_{i=1}^3 x_i^2 \leq r_0^2$  в пространстве Минковского  $\mathbb{L}^4$ . Область  $U$  глобально гиперболического пространства  $M$ , а иногда и само  $M$ , будем называть *лазом* (соответствующий английский термин — shortcut), если существует изометрия  $\varkappa: (M - U) \rightarrow (\mathbb{L}^4 - C)$  и пара точек  $p, q \in (M - U)$  таких, что

$$p \preceq q, \quad \varkappa(p) \not\preceq \varkappa(q)$$

(напомню обозначения:  $a \preceq b$  означает, что из точки  $a$  до  $b$  можно провести направленную в будущее причинную кривую; ниже нам еще понадобятся  $J^+(a) \equiv \{x \mid a \preceq x\}$ ,  $J^-(a) \equiv \{x \mid x \preceq a\}$  и  $J^\pm(\gamma) \equiv \bigcup_{a \in \gamma} J^\pm(a)$ ). Итак,  $M$  — лаз, если его можно получить из пространства Минковского заменой цилиндра  $C \subset \mathbb{L}^4$  на нечто такое (а именно, на  $U$ ), что точки, пространственноподобно разделенные в  $\mathbb{L}^4$ , становятся причинно связанными. Путешествие сквозь лаз из  $p$  в  $q$  как раз и есть сверхсветовое перемещение, т. к. тело попадает туда, куда свет (будь это пространство Минковского) дойти бы не успел.

**Пример 1.** „Пузырь Алькубиерре“. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим метрику

$$ds^2 = \Omega^2(r)(dx^2 + dy^2), \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

где  $\Omega$  — монотонная функция такая, что

$$\Omega|_{r > r_0} = 1, \quad \Omega|_{r < (1-\delta)r_0} = \Omega_0 = const, \quad 0 < \delta, \Omega_0 \ll 1.$$



Все пространство, кроме колечка  $1 - \delta < r/r_0 < 1$  является плоским и, более того, при  $r > r_0$  оно неотличимо от Евклидовой плоскости. Тем не менее, точка  $(x = -r_0, y = 0)$  намного ближе ( $\approx 2\Omega_0 r_0$  против  $2r_0$ ) к диаметрально противоположной точке  $(x = r_0, y = 0)$ , чем в случае Евклидовой плоскости. Естественное 4-мерное обобщение (ср. [2])

$$ds^2 = -dt^2 + \Omega^2(r)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad r \equiv \left( \sum_{i=0}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$$

очевидно является лазером [см. рис. 1(а)].

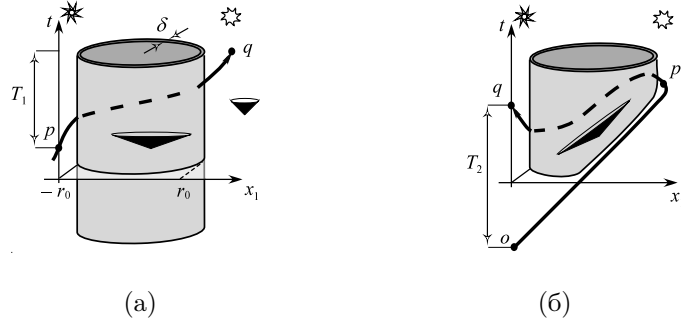


Рис. 1: (а) Световой конус внутри лазера раскрыт (в данных координатах) в  $1/\Omega_0$  раз шире, чем в пространстве Минковского. Поэтому пунктирная линия времениподобна. (б) „Искусственный“ лазер.  $o$  предшествует ему.

**Пример 2. „Труба Красникова“.** Пусть  $M$  — это  $\mathbb{R}^4$  с метрикой [3]

$$ds^2 = (dx_1 - dt)(kdx_1 + dt) + dx_2^2 + dx_3^2, \quad (1)$$

где  $k = k(r)$  — монотонная функция такая, что

$$k|_{r>r_0} = 1, \quad k|_{r<(1-\delta)r_0} = k_0 = const, \quad -1 < k_0 < 0.$$

Пространство, как и в предыдущем примере, искривлено только в сферическом слое толщины  $\delta$ . Главное — и, как мы увидим ниже, важное — отличие состоит в том, что путешествие теперь может закончиться *еще до того как началось*, см. рис. 1(б). Эффект этот чисто координатный (время измеряется в разных точках) и с нарушением причинности не связан. Действительно, рассмотрим функцию  $F = t + \frac{k_0-1}{2}x_1$  и любую

непродолжимую причинную кривую  $\lambda(\zeta)$ , где  $\zeta$  — натуральный параметр во вспомогательной евклидовой метрике

$$ds_E^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad \omega_0 \equiv dt + \frac{k-1}{2}dx_1, \quad \omega_1 \equiv \frac{k+1}{2}dx_1$$

(она отличается от метрики (1) только знаком при  $\omega_0^2$ ). Нетрудно доказать, что  $|dF/d\zeta| > (1 + k_0)/2$ , откуда ясно, что  $\lambda$  должна рано или поздно пересечь (единственный раз) поверхность  $F = 0$ . Последняя, т. о., является поверхностью Коши  $M$  и, следовательно (см. [4, предложение 6.6.3]),  $M$  глобально гиперболично. Наличие требуемых  $p$  и  $q$  очевидно, и мы заключаем, что  $M$  — лаз.

**Пример 3. „Кротовина“.** Вырежем из пространства Минковского два тонких цилиндра, см. рис. 2(а), склеим границы получившихся дыр и „сгладим“ метрику в окрестности склейки так, чтобы устранить возникший там разрыв производных. Получившееся пространство [5, 6],

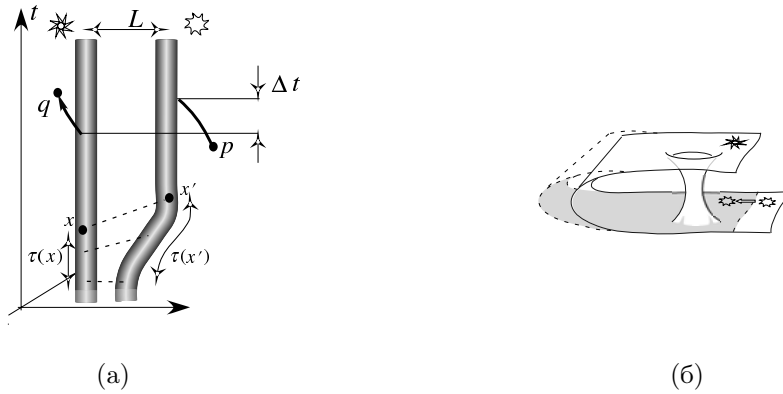


Рис. 2: Кротовина с меняющимся во времени расстоянием между входами. Концы пунктирных линий склеены.

называют *кротовиной* (в англоязычной литературе — wormhole). Часто так же называют и его пространственноподобное сечение, рис. 2(б). Описанная процедура неоднозначна, т. к. точки на границах цилиндров можно отождествлять по-разному. Обычно склеивают точки с равным  $\tau$ , где  $\tau$  есть (лоренцево) расстояние до некоторой плоскости — скажем,  $t = 0$  — измеренное вдоль образующей цилиндра. Такое правило нужно,

если мы хотим описывать кротовину, эволюционирующую, как показано на рис. 2(б): расстояние между входами во „внешнем“ пространстве меняется, а форма кротовины (и, соответственно, ее „длина“) — нет. Очевидно, если при  $t > 0$  один вход покоится, а другой движется, то у склеиваемых точек окажется разное  $t$  („парадокс близнецов“). Поэтому, кротовину можно (в частности) использовать и для перемещений, которые „кончатся раньше, чем начались“, см. рис. 2(а). Как и в прошлом примере, это не обязательно нарушает причинность: если  $\Delta t < L$ , пространство остается глобально гиперболическим и, как следствие, — лазом.

Пригодность лазов для межзвездных перелетов различна. Будем говорить, что точка  $o \in M$  *предшествует* лазу, если  $\varkappa$  может быть продолжена на  $M - J^+(o)$ , и назовем лаз *вечным*, если ему не предшествует никакая точка. Очевидно, в отсутствие тахионов лаз можно интерпретировать как созданный по решению, принятому в  $p$ , только если  $p$  этому лазу предшествует. Вечный же лаз создать вообще нельзя, а можно только *найти*.

Все три рассмотренных выше лаза, будучи статическими, являются, конечно, вечными. В случае кротовины это обстоятельство принципиально — в глобально гиперболическом пространстве-времени кротовина не может ни появиться, ни исчезнуть (см. [4, предложение 6.6.8]). В то же время, два первых лаза легко модифицировать так, чтобы они перестали быть вечными. Достаточно отменить при  $t, r < r_0$  условия наложенные на  $\Omega$  и  $k$ , а при  $t < r$  потребовать, чтобы  $\Omega$  и  $k$  были равны 1. Таким лазам предшествует, например, начало координат.

К сожалению, точка  $p$ , фигурирующая в определении лаза, не может этому лазу предшествовать (иначе  $q$  — в противоречии с определением — лежала бы в  $M - J^+(p)$ , поскольку  $\varkappa(q)$  лежит в  $\mathbb{L}^4 - J^+[\varkappa(p)]$ ). Т. о., когда решение лететь к Денебу принято, строить лаз уже поздно в том смысле, что  $T_1$  это не уменьшит. Что, однако, не обесценивает идею такого строительства — лазом еще не поздно воспользоваться для уменьшения  $T_2$  (см. рис. 1(б)), а это, похоже, для практических нужд гораздо важнее.

## 2. Квантовые ограничения

До сих пор мы обсуждали возможность преодоления „светового ба-

рьера“ с чисто геометрической точки зрения. Однако, в рамках ОТО геометрия вселенной и свойства заполняющего ее вещества связаны уравнениями Эйнштейна  $G_{ik} = 8\pi T_{ik}$  (здесь и ниже по умолчанию подразумевается система единиц, в которой  $G = \hbar = c = 1$ ), и можно поставить вопрос о том, какими свойствами должен обладать тензор энергии-импульса (ТЭИ) материи, заполняющей лаз. Оказывается, во всех рассмотренных выше примерах есть точки, где  $G_{ik}t^i t^k < 0$  для некоторого времениподобного вектора  $\mathbf{t}$  и, значит, нарушается т. н. слабое энергетическое условие (СЭУ), требующее, чтобы

$$T_{ik}t^i t^k \geq 0 \quad \forall \mathbf{t}: t^i t_i \leq 0,$$

т. е. чтобы плотность энергии была неотрицательна в любой системе отсчета. Хотя строгое доказательство пока найдено только для кротовин [7], похоже, что нарушение СЭУ присуще *любому* лазу. Грубо говоря, если бы плотность энергии всюду была неотрицательна, то естественно было бы ожидать, что на больших расстояниях (т. е. в Ньютоновском пределе) гравитационное поле убывало бы, как  $1/r^2$ , а не исчезало совсем, как того требует определение лаза.

В классической физике плотность энергии предположительно не может быть отрицательной (поэтому вещество, нарушающее СЭУ называют *экзотическим*) и т. о. для сверхсветовых перелетов остаются две возможности:

1). Можно исследовать ситуации, в которых нарушения СЭУ связаны просто с тем, что мы приписали нулевую кривизну области  $N$ . Тем самым мы *заранее* посчитали отсутствующими любые источники энергии и, в том числе, нужные для обеспечения (соблюдающего СЭУ) сверхсветового перелета. Чтобы последовательно учесть наличие потенциальных источников энергии (скажем, звезд, лежащих чуть в стороне от прямой Земля–Денеб), понятие лаза придется обобщить (это не трудно) так, чтобы  $M$  сравнивалось не с  $\mathbb{L}^4$ , а с неким — тоже искривленным —  $M'$ . Такого рода лазы, действительно, не требуют экзотического вещества (см. Приложение в [1]), но вопрос о том, насколько эффективными в этом случае они могут быть, остается открытым.

2). Можно также учесть квантовые поправки к уравнениям Эйнштейна. В полуклассической гравитации [8, 9] последние приобретают вид

$$G_{ik} = 8\pi T_{ik}^C + 8\pi T_{ik},$$

где  $T_{ik}^C$  — вклад классической материи, а второй член — это ренормированное среднее значение ТЭИ рассматриваемого поля. Известно, что

$T_{ik}$  может нарушать СЭУ (классический пример — эффект Казимира). Эта, вторая возможность с точки зрения квантовой теории поля гораздо интересней, на ней мы и остановимся.

Пусть  $\gamma(\tau)$  — мировая линия свободно падающего наблюдателя и  $\tau$  — его собственное время. Рассмотрим „усредненную с  $\chi$ “ плотность энергии  $\rho = T_{\hat{0}\hat{0}}$  (шляпки над индексами тензора означают, что его компоненты определяются в ортонормированном базисе, с нулевым ортом  $\partial_\tau$ )

$$\rho_\chi(\tau_0) \equiv \int_{-\infty}^{-\infty} \rho(\tau) \chi(\tau - \tau_0) d\tau,$$

где интеграл берется вдоль  $\gamma$ , а функция  $\chi$  нормирована условием

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \chi(\tau) d\tau = 1.$$

В случае скалярного (с минимальной связью) и электромагнитного полей в  $d$ -мерном пространстве Минковского ( $d = 2, 4$ ) доказано [10], что для функций специального вида, а именно  $h(\tau) \equiv \pi^{-1} \Delta / (\tau^2 + \Delta^2)$ , справедливо неравенство

$$\rho_h > -\Delta^{-d}. \quad (2)$$

Факт этот часто интерпретируется как математическое выражение некоего „принципа дополнительности“, связывающего нарушения СЭУ с промежутком времени  $\Delta$ , в течение которого его можно наблюдать: чем сильнее нарушение (т. е. чем больше  $|\rho|$ ), тем меньше  $\Delta$ . Исходя из идеи, что искривленное пространство является „почти плоским“, если рассматривается достаточно маленькая область, Форд и Роман предположили [11], что подобный принцип верен универсально — т. е. для любых квантовых состояний любых свободных<sup>†</sup> полей в любом пространстве-времени. Конкретно, если усреднение производится с функцией  $f$ :

$$f \in C^\infty, \quad \text{supp } f \in (\tau_1, \tau_2), \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f'(\tau)]^2 / f(\tau) d\tau \lesssim 1, \quad (3)$$

то, предположительно [12], должно выполняться неравенство

$$\rho_f \gtrsim -T^{-d} \quad \forall T \lesssim T_R, \quad (4)$$

<sup>†</sup>Что для взаимодействующих полей он заведомо неверен, видно уже из того, что ему не подчиняется (даже в плоском пространстве) эффект Казимира, в котором  $\rho(t) = \text{const} < 0$ .

где

$$\mathcal{T} \equiv |\tau_2 - \tau_1|, \quad \mathcal{T}_R \equiv (\max |R_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}}|)^{-1/2}.$$

Максимум здесь берется по всем компонентам и всем  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ . Физический смысл „квантового неравенства“ (4) примерно тот же, что и (2), а условие на  $\mathcal{T}$  должно гарантировать малость рассматриваемой области (иногда его приходится дополнять неким топологическим требованием, см. раздел 3.1). Выбор функций (3) вызван тем, что именно для таких  $f$  неравенство (4) удалось доказать (при  $d = 2$  для безмассового скалярного поля в состоянии конформного вакуума [13, 14]).

Квантовое неравенство (КН) позволяет весьма эффектно продемонстрировать „нефизичность“ лазов, рассмотренных выше [15]<sup>‡</sup>. Ход рассуждений приблизительно таков. Пусть  $p$  такая точка, что через нее проходит времениподобный геодезический сегмент  $\gamma(\tau)$  длины  $\mathcal{T}_R$ , вдоль которого  $\rho$  отрицательна и примерно постоянна. Предположим,

$$\max |R_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}}(p)| \lesssim \max |T_{\hat{k}\hat{i}}(p)| \approx -\rho(p) \quad (5)$$

(во всех трех лазах действительно можно найти  $p$ , удовлетворяющую предъявленным требованиям). Применяя (4) с  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R$  к  $\gamma$ , получим

$$|\rho_f| < \mathcal{T}_R^{-4} = (\max |R_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}}|)^2 \lesssim \rho^2(p) \quad (6)$$

или

$$|\rho(p)| \gtrsim \rho_f / \rho(p) \approx 1. \quad (7)$$

Т. о. плотность энергии в  $p$  должна быть Планковской! В рассмотренных выше примерах можно представить себе, что СЭУ нарушается только в тонком — скажем, Планковской толщины — сферическом слое. Однако, если мы хотим использовать лаз для перемещения макроскопических объектов (с характерным размером  $l$ ), то естественно ожидать, что диаметр слоя будет  $\sim l$  и объем  $V \sim \pi l_{\text{Pl}} l^2$ . Поэтому при  $l \sim 1$  м „суммарное количество отрицательной энергии“, заключенное даже в столь тонком слое будет чудовищным:

$$|E_{\text{tot}}^-| = -\rho V \sim \pi \left( \frac{2, 2 \times 10^{-8} \text{ кг}}{(1, 6 \times 10^{-35} \text{ м})^3} \right) 1 \text{ м}^2 (1, 6 \times 10^{-35} \text{ м}) \approx 3 \times 10^{62} \text{ кг}. \quad (8)$$

Очевидно, каков бы ни был (несколько туманный) физический смысл величины  $E_{\text{tot}}^-$ , этот результат следует интерпретировать как полную

<sup>‡</sup>На самом деле, в этих работах рассматривались чуть более сложные метрики.

невозможность создания такого рода лазов даже в очень отдаленном будущем. Сам по себе этот факт не слишком важен в случае пространств из примеров 1, 2. Действительно, оба пространства выбиралась настолько простыми, насколько позволяла задача, для которой они были придуманы: иллюстрация *принципиальной* совместимости сверхсветовых перемещений с запретом локального превышения скорости света. Можно предполагать поэтому, что нежелательные свойства требующихся для них источников являются следствиями именно этой простоты. Проблема, однако, в том, что рассуждения, приведшие к (8), представляются настолько общими, что кажется, будто они справедливы для *любого* лаза. Это означало бы, что квантовое неравенство исключает сверхсветовые перемещения.

### 3. Универсальность ограничений

Общность рассуждений, обосновывающих (8), в действительности несколько обманчива. Существует ряд ситуаций, в которых КН, даже если оно справедливо, не требует, тем не менее, справедливости (8). Рассмотрим некоторые из них (подробности см. [1, 16]).

#### 3.1 Нелокальные эффекты

Как известно [9], у безмассового скалярного поля на цилиндре

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad x = x + L.$$

есть квантовое состояние, в котором  $\rho = -\frac{\pi}{6}L^{-2}$ . Такая плотность энергии очевидно противоречит (4), поскольку в данном случае  $T_R = \infty$ . Возможно, это связано с тем, что на масштабах  $\gtrsim L$  цилиндр — хотя он и плоский — все же „недостаточно похож“ на часть пространства Минковского. Т. о. условие на величину  $T$  в (4) *необходимо дополнить* еще каким-нибудь требованием, которое бы учитывало такую возможность. Можно, в частности<sup>§</sup>, ограничить действие КН геодезическими  $\gamma$  настолько короткими, что  $J_\gamma \equiv J^+(\gamma) \cap J^-(\gamma)$  имеет топологию шара (как это имеет место в  $\mathbb{L}^4$ ). Такое условие, однако, выводит из-под действия КН наиболее интересную разновидность кротовин. Действительно, пусть  $\lambda$  — любой времениподобный геодезический отрезок в горловине статической (для простоты) кротовины. Можно показать, что при

<sup>§</sup>Это обобщение условия, которое Фьюстер [14] использует в случае  $d = 2$ . Других приемлемых (т. е., как минимум, координатно независимых) вариантов подобного условия пока не предлагалось.

$\Delta t \rightarrow L$  и неизменной геометрии горловины на  $\lambda$  обязательно найдутся точки, соединимые негомоторной  $\lambda$  причинной кривой (и значит  $J_\lambda$  уж точно не шар). Т. о., КН оказывается тем менее ограничительным, чем „эффективнее“ кротовина с точки зрения межзвездных перелетов.

### 3.2 Искривление пространства удаленными телами

Важную роль при выводе (7) играло неравенство в (5), выражающее идею, что кривизна в  $p$  возникает за счет наличия в  $p$  экзотического вещества. С учетом уравнений Эйнштейна обсуждаемое неравенство приобретает вид

$$\max |R_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}}(p)| \lesssim \max |G_{\hat{k}\hat{i}}(p)| \quad (9)$$

и на первый взгляд должно выполняться всегда при отсутствии специальных симметрий или подгонок параметров. Это, однако, не верно. Кривизна в точке определяется (среди прочего) тензором Вейля:

$$R_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}} = C_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}} - g_{i[\hat{n}}R_{\hat{m}]\hat{j}} - g_{j[\hat{m}}R_{\hat{n}]i} - \frac{1}{3}g_{i[\hat{m}}g_{\hat{n}]\hat{j}}R.$$

Т. о. основания ожидать, что (9) справедливо, есть только, когда

$$P \equiv \max |C_{i\hat{j}\hat{m}\hat{n}}| / \max |R_{i\hat{j}}| \lesssim 1,$$

а это, как правило, не выполняется. В частности, в любой искривленной, но пустой области (например, в окрестности любой звезды)  $P = \infty$ .

### 3.3 Неоднородное распределение материи

Попробуем воспроизвести вывод (8), опустив условие постоянства  $\rho(\tau)$ . Тогда для оправдания последнего неравенства в (6) придется потребовать  $|\rho(p)| \approx \max_\gamma |\rho|$ . С другой стороны, для (7) нужно  $|\rho_f| \gtrsim |\rho(p)|$ . Значит для получения таким способом (8) существенно, чтобы  $|\rho_f| \approx \max_\gamma |\rho|$ , т. е.

$$|\rho_f| \gtrsim |\bar{\rho}|, \quad \bar{\rho} \equiv T^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho(\tau) d\tau \quad (10)$$

( $\bar{\rho}$ , очевидно, есть обычное среднее). Вкупе с (4) это значит, что необходимым условием является

$$|\bar{\rho}| \lesssim T^{-d} \quad \text{при} \quad T \lesssim T_R. \quad (11)$$



Верно ли неравенство (4) за пределами двумерного конформно-тривиального случая неизвестно, но вот (11) определенно нарушается даже и в этом случае [16].

**Пример 4.** Рассмотрим двумерное пространство де Ситтера. При подходящем выборе координат  $u, v$  (покрывающих все пространство) метрика в области  $W = \{\epsilon < \operatorname{arctg} e^{2v} < \operatorname{arctg} e^{2u} < \frac{\pi}{2} - \epsilon\}$  примет вид

$$ds^2 = \alpha^2 \sinh^{-2}(u - v) du dv.$$

ТЭИ безмассового скалярного поля в состоянии конформного вакуума, ассоциированного с так записанной метрикой [9]

$$T_{vv} = T_{uu} = -\frac{1}{12\pi}, \quad T_{uv} = \frac{1}{12\pi} \sinh^{-2}(u - v).$$

Пусть  $\gamma$  — сегмент времениподобной геодезической, заданный условием

$$v + u = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad t \equiv \frac{1}{2}(v - u).$$

Потребуем, обеспечив этим, в частности,  $\gamma \subset W$ , чтобы

$$\frac{1}{2} \ln \tan \epsilon < t_1 < t_2 \ll -1.$$

Плотность энергии, измеренная наблюдателем с мировой линией  $\gamma$ , будет

$$\rho = T_{\hat{0}\hat{0}} = 2(T_{uu} - T_{uv})(\alpha^2 \sinh^{-2}(u - v))^{-1} \approx -\frac{\sinh^2(u - v)}{6\pi\alpha^2},$$

откуда

$$-\bar{\rho} = \frac{\mathcal{T}^{-1}}{6\pi} \int_{t_1}^{t_2} \alpha^{-1} \sinh(u - v) dt \approx \frac{\mathcal{T}^{-1}}{24\pi} \alpha^{-1} e^{-2t_1}.$$

В то же время

$$\mathcal{T} = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sinh^{-1} 2t dt \approx \alpha \int_{2t_1}^{2t_2} e^s ds \approx \alpha e^{2t_2}.$$

Таким образом,

$$\bar{\rho} = -\frac{1}{24\pi} e^{2(t_2 - t_1)} \mathcal{T}^{-2}, \quad \mathcal{T} \ll \mathcal{T}_R = \alpha,$$

что очевидно нарушает (к тому же сколь угодно сильно при достаточно малых  $\epsilon$  и  $t_1$ ) неравенство (11).

### 3.4 „Экономные“ лазы

Даже если плотность энергии экзотического вещества  $\rho \sim -1$ , отсюда в общем случае все еще не следует (8). Дело в том, что  $V$ , на самом деле, не обязательно должен быть  $\gtrsim l^2$ .

**Пример 5. „Портал“.** Введем две положительные константы,  $\rho_0$ , и  $\eta_\varepsilon$ , связанные требованием  $\rho_0 \gg \eta_\varepsilon^2$ , и две функции — произвольную гладкую четную функцию  $\varepsilon(\eta)$  со свойством  $\text{supp } \varepsilon = (-\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$  и  $\rho$ , определенную равенством

$$\rho(\eta, \psi) \equiv \rho_0 - \eta^2 \cos 2\psi.$$

Рассмотрим пространство-время

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + 4(\varepsilon^2 + \eta^2)(d\eta^2 + \eta^2 d\psi^2) + \rho^2 d\phi^2, \\ \eta, \rho &\geq 0, \quad \phi = \phi + 2\pi, \quad \psi = \psi + 2\pi. \end{aligned} \quad (12)$$

(подразумевается, что точки с  $\eta = 0$ , различающиеся только значением  $\psi$ , отождествляются, так же как и точки с  $\rho = 0$ , различающиеся только значением  $\phi$ ). Чтобы увидеть структуру этого пространства-времени (подробнее см. [1]), заметим, что при  $\eta > \eta_\varepsilon$  метрика имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2,$$

где  $z \equiv \eta^2 \sin 2\psi$ . Поскольку  $z(\psi) = z(\pi + \psi)$ , можно представить пространство (12), как результат следующей хирургии. Возьмем два экземпляра Евклидова пространства  $\mathbb{E}^3$  и вырежем из каждого по диску  $\mathcal{D}$  радиуса  $\rho_0$ . Склеим теперь эти разрезанные пространства: левый берег каждого разреза отождествляется с правым берегом другого. Получившееся пространство (на самом деле, это просто двулистное накрытие  $\mathbb{E}^3 - \mathbb{S}$ , где  $\mathbb{S} = \text{Bd } \mathcal{D}$ ) сингулярно, т. к. мы вынуждены удалить точки ветвления  $\mathbb{S}$  (в них теряется структура хаусдорфова многообразия). Оказывается, однако, что если должным образом искривить его метрику в полнотории (толщины  $\eta_\varepsilon^2$  в нашем случае), окружающем  $\mathbb{S}$ , то указанная сингулярность *устранима*. В пространство можно вклеить окружность так, что оно станет полно. Это и будет сечение  $t = \text{const}$  пространства-времени (12).

Чтобы получить из (12) лаз, достаточно удалить по полупространству — скажем,  $z > d$  и  $z < -d$  — из каждого листа, а появившиеся границы склеить. Результат показан на рис. 3(a).

Макроскопическое тело может пройти сквозь портал с  $\rho_0 \sim l/2$  при том, что область ненулевой кривизны в таком портале имеет объем

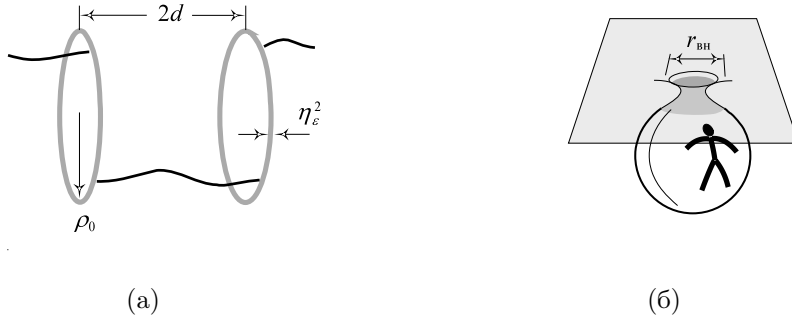


Рис. 3: (а) „Портал“. Два серых кольца, на самом деле, представляют собой *единый* полноторий. Верхняя толстая кривая непрерывна. Нижняя — является нестягиваемой петлей. (б) „Карман Ван Ден Брука“. СЭУ нарушается только в горловине (более темный участок).

$V \sim \pi l$  (я выбрал  $\eta_\epsilon \sim 1$ ). Даже если она вся заполнена экзотическим веществом планковской плотности, то  $|E_{\text{tot}}^-|$  при  $l \sim 1$  м составит  $\sim 5 \times 10^{27}$  кг. Хотя это и очень большая величина, она все же на 35 порядков (!) меньше той, что предсказана (8) и составляет „всего лишь“  $\sim 2 \times 10^{-3} M_\odot$ .

Следует также отметить, что лаз, пригодный для транспортировки макроскопических тел не обязан *сам* быть макроскопическим, обстоятельство позволяющее, в принципе, уменьшить  $E_{\text{tot}}^-$  еще на 35 порядков. Дело в том, что даже очень большой объем может быть ограничен сферой очень маленькой площади. Например, в пространстве, показанном на рис. 3(б) область заполненная экзотическим веществом — это сферический слой радиуса  $r_{\text{вн}}$ . И какую бы большой ни была область с пассажиром,  $r_{\text{вн}}$  может оставаться микроскопическим [17]. Можно, в частности потребовать  $r_{\text{вн}} \sim 1$ . Для удержания от схлопывания такого „кармана“ достаточно, оказывается, всего  $E_{\text{tot}}^- \sim -10^{-3}$  г экзотической материи [1].

## Список литературы

- [1] S. Krasnikov. *Phys. Rev. D* **67**, 104013 (2003).
- [2] M. Alcubierre. *Class. Quantum Grav* **11**, L73 (1994).
- [3] S. Krasnikov. *Phys. Rev. D* **57**, P. 4760 (1998).
- [4] С. Хокинг, Дж. Эллис. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
- [5] M. S. Morris and K. S. Thorne. *Am. J. Phys* **56**, P. 395 (1988).
- [6] M. Visser. *Lorentzian wormholes — from Einstein to Hawking*. New York: AIP Press, 1995.
- [7] J. L. Friedman, K. Schleich, and D. M. Witt. *Phys. Rev. Lett* **71**, 1486 (1993).
- [8] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [9] Н. Биррелл, П. Девис. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
- [10] L. H. Ford and T. A. Roman. *Phys. Rev. D* **51**, 4277 (1995); L. H. Ford and T. A. Roman. *Phys. Rev. D* **55**, 2082 (1997).
- [11] L. H. Ford and T. A. Roman. *Phys. Rev. D* **53**, 5496 (1996).
- [12] L. H. Ford, M. J. Pfenning, and T. A. Roman. *Phys. Rev. D* **57**, 4839 (1998).
- [13] D. N. Vollick. *Phys. Rev. D* **61**, 084022 (2000); Ё. Ё. Flanagan. *ibid* **66**, 104007 (2002).
- [14] C. J. Fewster. *Phys. Rev. D* **70**, 127501 (2004).
- [15] M. J. Pfenning and L. H. Ford. *Class. Quantum Grav* **14**, 1743 (1997); A. E. Everett and T. A. Roman. *Phys. Rev. D* **56**, 2100 (1997).
- [16] S. Krasnikov. *Gravitation and Cosmology* **46**, 195 (2006).
- [17] C. Van Den Broeck. *Class. Quantum Grav* **16**, 3973 (1999).

# История образования структуры во Вселенной

В. Н. Лукаш\*, Е. В. Михеева†, В. Н. Строков‡

*Астрокосмический Центр ФИАН*

А.А. Гриб внес выдающийся вклад в квантовую теорию рождения частиц в нестационарных гравитационных полях. Вселенная – неравновесная развивающаяся система, гравитационный потенциал которой меняется со временем. В этих условиях происходит параметрическое рождение безмассовых ( $m < H$ ) частиц и полей из вакуума под действием внешнего переменного потенциала [1].

Данная статья посвящена одному из важнейших безмассовых полей такого рода – скалярному полю начальных неоднородностей плотности, которые за миллиарды лет космологической эволюции привели к образованию галактик, звезд и, в конечном счете, жизни на Земле. Свойства наблюдаемой структуры Вселенной подтверждают вывод о том, что она возникла из случайного гауссова поля затравочных возмущений, которое естественно генерируется квантово-гравитационным образом в ранней Вселенной. Для обеспечения необходимой для этого амплитуды начальных неоднородностей интенсивность быстропеременного гравитационного потенциала в момент их параметрического рождения должна была быть очень велика: в простейших моделях  $H \sim 10^{13}$  Гэв, что составляет  $10^{-6}$  массы Планка.

Таким образом, квантово-гравитационный физический эффект рождения частиц, которому в значительной степени посвящены пионерские работы А.А. Гриба, приводит нас к физике высоких энергий и позволяет заглянуть за край известной науки.

---

\*E-mail: lukash@asc.rssi.ru

†E-mail: helen@asc.rssi.ru

‡E-mail: strokov@asc.rssi.ru

## 1. От поздней Вселенной к ранней

Наблюдаемая структура Вселенной есть результат произведения стартовых условий и эволюции поля возмущений плотности. Современные наблюдательные данные позволили определить характеристики поля возмущений плотности в разные эпохи его развития. Тем самым, удалось разделить информацию о начальных условиях и об условиях развития, что положило начало независимому исследованию физики ранней и поздней Вселенной.

Связь между этими двумя периодами космологической эволюции приобретает более глубокий смысл в контексте так называемой проблемы совпадений. Известно, что в пределах одного порядка величины в современной Вселенной имеется приближенное равенство

$$\rho_E \approx \rho_M \approx \rho_b, \quad (1)$$

где  $\rho_{E,M,b}$  – космологические плотности темной энергии, темной материи и барионов, соответственно. Причем приближенное соотношение  $\rho_M \approx \rho_b$  справедливо в каждый момент космологической эволюции после образования барионной асимметрии и генерации темной материи, поскольку  $\rho_M$  и  $\rho_b$  одинаковым образом уменьшаются при расширении Вселенной. С другой стороны,  $\rho_E$  очень слабо зависит от времени, так что первое из равенств (1) справедливо именно в современную эпоху.

Соотношения между параметрами  $\rho_R$  (плотность энергии излучения),  $\rho_E$  и  $\rho_m = \rho_M + \rho_b$ :

$$\rho_R \ll \rho_m, \quad \rho_E \lesssim \rho_m$$

имеют прямое отношение к возможности генерации структуры во Вселенной. Гравитационная неустойчивость развивается только в период доминирования нерелятивистской материи и невозможна ни на радиационно-доминированной стадии, ни на стадии доминирования темной энергии.

Однако для образования структуры необходимо выполнение еще одного условия: начальная амплитуда возмущений должна быть именно такой, чтобы неоднородности успели вырасти в эпоху открытия "окна" гравитационной неустойчивости. В нашей Вселенной оба необходимых условия выполнены: начальные возмущения ( $\sim 10^{-5}$ ) успевают подрасти и образовать крупномасштабную структуру Вселенной в период открытия "окна", простирающегося от 300 тыс. до 20 млрд. лет.

Под термином *ранняя Вселенная* в современной космологии подразумевают заключительную стадию ускоренного расширения с последующим переходом к горячей фазе эволюции. Сегодня нам неизвестны параметры Большого взрыва, имеются только верхние ограничения (см. (13)). Однако существует хорошо разработанная теория производства космологических возмущений, в соответствии с которой мы можем рассчитать спектры начальных возмущений плотности вещества и первичных гравитационных волн в зависимости от значений космологических параметров.

Причины отсутствия общепринятой модели ранней Вселенной кроются в устойчивости предсказаний инфляционной парадигмы Большого взрыва – близости генерируемых спектров к плоскому виду, относительной малости амплитуды космологических гравитационных волн, 3-мерной евклидовости видимой Вселенной и др., – которые могут быть получены в широком классе моделей. Моментом истины для построения модели ранней Вселенной оказалось бы открытие космологических гравитационных волн, которое возможно в случае успешного проведения эксперимента PLANCK.

Ситуация с поздней Вселенной диаметрально противоположна. Мы располагаем достаточно точной моделью – знаем состав материи, законы развития структуры, значения космологических параметров. Но не имеем общепринятой теории происхождения компонент материи.

Известные нам свойства видимой Вселенной позволяют описать ее геометрию в рамках теории возмущений. Малым параметром ( $10^{-5}$ ) является амплитуда космологических возмущений.

В нулевом порядке Вселенная фридмановская и описывается единственной функцией времени – масштабным фактором  $a(t)$ . Первый порядок устроен несколько сложнее. Возмущения метрики являются суммой трех независимых мод – скалярной  $S(k)$ , векторной  $V(k)$  и тензорной  $T(k)$ , каждая из которых характеризуется своей спектральной функцией волнового числа  $k$ . Скалярная мода описывает космологические возмущения плотности, векторная мода ответственна за вихревые движения вещества, а тензорная мода – это гравитационные волны. Таким образом, вся геометрия описывается с помощью четырех функций –  $a(t)$ ,  $S(k)$ ,  $V(k)$  и  $T(k)$ , из которых нам известны сегодня лишь первые две (в некоторых областях определения).

Большой взрыв представлял собой катастрофический процесс быстрого расширения, сопровождаемый интенсивным быстропеременным гравитационным полем. В ходе космологического расширения возмуще-

ния метрики спонтанно рождались параметрическим образом из вакуумных флуктуаций, как рождаются любые безмассовые степени свободы под действием внешнего переменного поля. Анализ наблюдательных данных свидетельствует о квантово-гравитационном механизме рождения затравочных возмущений. Тем самым, крупномасштабная структура Вселенной является примером решения проблемы измеримости в квантовой теории поля.

Отметим основные свойства рожденных  $S$ - и  $T$ - полей возмущений: гауссова статистика (случайные распределения в пространстве), выделенная временная фаза (*растущая* ветвь решения), отсутствие выделенного масштаба в широком диапазоне длин волн, ненулевая амплитуда гравитационных волн. Последнее имеет решающее значение для построения модели ранней Вселенной, поскольку, имея простейшую связь с фоновой метрикой, гравитационные волны несут прямую информацию об энергетическом масштабе Большого взрыва.  $V$ -мода не генерируется параметрическим образом и мы ее здесь не рассматриваем.

В результате развития скалярной моды возмущений образовались галактики и другие астрономические объекты. Знанием последних лет (эксперимент WMAP) стала анизотропия и поляризация реликтового излучения, которые возникли задолго до появления галактик в результате воздействия на распределение фотонов всех космологических мод возмущений. Совместный анализ наблюдательных данных о распределении галактик и анизотропии реликтового излучения позволил отделить вклады  $S$ - и  $T$ - полей космологических возмущений.

Пользуясь условием, что сумма  $S + T \simeq 10^{-10}$  фиксирована величиной анизотропии реликтового излучения, получаем верхнее ограничение на тензорную моду возмущений:

$$r \equiv \frac{T}{S} < 0, 1. \quad (2)$$

В случае, если бы это неравенство было нарушено, величина возмущений плотности оказалась бы недостаточной для образования наблюдаемой структуры Вселенной.

Далее мы коротко изложим теорию параметрического рождения космологических неоднородностей, рассмотрим наблюдательные аргументы, которые в конце концов заставили физиков ввести в научный обиход понятие темной энергии, и покажем каким образом она подавляет образование новых структур во Вселенной.



## 2. Генерация возмущений

Эффект квантово-гравитационного рождения безмассовых полей хорошо изучен. Так могут рождаться частицы вещества (см. [1, 2] и др.) (хотя, например, реликтовые фотоны возникли вследствие распада протоматерии в ранней Вселенной). Таким же образом происходит генерация гравитационных волн [3] и возмущений плотности [4], поскольку эти поля тоже относятся к безмассовым, и их рождение не запрещено пороговым энергетическим условием.

Теория  $S$ - и  $T$ - мод возмущений во фридмановской Вселенной сводится к квантово-механической задаче об эволюции независимых осцилляторов  $q_k(\eta)$ , находящихся во внешнем параметрическом поле  $\alpha(\eta)$  в мире Минковского с временной координатой  $\eta = \int dt/a$ . Действие и лагранжиан элементарных осцилляторов зависят от их пространственной частоты  $k$ :

$$S_k = \int L_k d\eta, \quad L_k = \frac{\alpha^2}{2k^3} (q_k'^2 - \omega^2 q_k^2), \quad (3)$$

где штрих это производная по времени  $\eta$ ,  $\omega = \beta k$  – частота осциллятора,  $\beta$  – скорость распространения возмущений в единицах скорости света в вакууме (здесь и далее  $c = \hbar = 1$ , индекс  $k$  у поля  $q$  опущен). В случае  $T$ -моды  $q \equiv q_T$  есть поперечно-бесследовая компонента метрики:

$$\alpha_T^2 = \frac{a^2}{8\pi G}, \quad \beta = 1. \quad (4)$$

В случае  $S$ -моды  $q \equiv q_S$  есть линейная суперпозиция продольного гравитационного потенциала (возмущение масштабного фактора) и потенциала 3-скорости среды, умноженного на функцию Хаббла, [4]:

$$\alpha_S^2 = \frac{a^2 \gamma}{4\pi G \beta^2}, \quad \gamma = \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5)$$

где точка означает производную по времени  $t$ .

Как видно из (4), поле  $q_T$  минимальным образом связано с фоновой метрикой и не зависит от свойств материи. Напротив, связь  $q_S$  с внешним полем (5) более сложна: она включает как производные от масштабного фактора, так и некоторые характеристики вещества (например, скорость распространения возмущений в среде). Мы ничего не знаем о протоматерии в ранней Вселенной, существуют только общие подходы к этому вопросу.

Обычно рассматривается идеальная среда с тензором энергии-импульса зависящим от плотности энергии  $\rho$ , давления  $p$  и скорости материи  $u^\mu$ . Для  $S$ -моды 4-скорость потенциальна и может быть представлена в виде градиента скаляра  $\varphi$ :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad u_\mu = \varphi_{,\mu}/w, \quad (6)$$

где запятая означает производную по координате, а  $w^2 = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}g^{\mu\nu}$  – нормировочная функция. Скорость звука задается с помощью уравнения состояния, как коэффициент пропорциональности между сопутствующими возмущениями давления и плотности энергии материи:

$$\delta p_c = \beta^2 \delta \rho_c, \quad (7)$$

где  $\delta X_c \equiv \delta X - \dot{X}v$ ,  $v \equiv \delta\varphi/w$  – потенциал 3-скорости среды.

Частным случаем идеальной среды является теория поля  $\varphi$  с лагранжевой плотностью  $L = L(w, \varphi)$ . В этом случае скорость распространения возмущений в материи находится из уравнения ([4]-[6]):

$$\beta^{-2} = \frac{\partial \ln |\partial L / \partial w|}{\partial \ln w}, \quad (8)$$

что также соответствует соотношению (6). В большинстве моделей ранней Вселенной предполагается  $\beta \sim 1$  (в частности, на радиационно-доминированной стадии  $\beta = 1/\sqrt{3}$ ).

Эволюция элементарных осцилляторов описывается уравнением Клейна-Гордона:

$$\bar{q}'' + (\omega^2 - U)\bar{q} = 0, \quad (9)$$

где

$$\bar{q} \equiv \alpha q, \quad U \equiv \frac{\alpha''}{\alpha}. \quad (10)$$

Решение этого уравнения имеет две асимптотические ветви поведения: *адиабатическую* ( $\omega^2 > U$ ), когда осциллятор находится в режиме свободных колебаний и его амплитуда возбуждения адиабатически затухает ( $|q| \sim (\alpha\sqrt{\beta})^{-1}$ ), и *параметрическую* ( $\omega^2 < U$ ), где поле  $q$  замораживается ( $q \rightarrow const$ ). Последнее условие с точки зрения квантовой теории поля означает параметрическое рождение пары частиц из состояния с элементарным возбуждением.

Количественно, спектры рожденных возмущений зависят от начального состояния осцилляторов:

$$T \equiv 2\langle q_T^2 \rangle, \quad S \equiv \langle q_S^2 \rangle, \quad (11)$$

коэффициент "2" в выражении для тензорной моды учитывает две поляризации гравитационных волн. Состояние  $\langle \rangle$  принято считать основным, т.е. соответствующим минимальному уровню начального возбуждения осцилляторов. В этом состоит главная гипотеза теории Большого взрыва. При наличии адиабатической зоны основное (вакуумное) состояние элементарных осцилляторов единственно [7].

Таким образом, предполагая что параметрический потенциал  $U(\eta)$  возрастает с течением времени и  $\beta \simeq 1$ , получаем универсальный общий результат для спектров  $T(k)$  и  $S(k)$  [8]:

$$T \simeq \frac{H^2}{M_P^2}, \quad \frac{T}{S} \simeq 4\gamma, \quad (12)$$

где  $k = \sqrt{U} \simeq aH$ , а  $M_P \equiv G^{-1/2}$  – планковская масса. Как видно из (12), теория никак не дискриминирует моду  $T$  по отношению к моде  $S$ . Все дело в величине фактора  $\gamma$  в эпоху генерации возмущений.

Из наблюдаемого факта малости  $T$ -моды в нашей Вселенной, получаем верхнее ограничение на энергетический масштаб Большого взрыва и на параметр  $\gamma$  в ранней Вселенной:

$$H < 10^{13} \text{ GeV}, \quad \gamma < 0,03. \quad (13)$$

Последнее условие попросту означает, что Большой взрыв носил инфляционный характер ( $\gamma < 1$ ).

Мы располагаем важнейшей фазовой информацией: поля рождаются в определенной фазе, параметрически усиливается только растущая ветвь решения. Поясним это, полагая что  $U = 0$  на *начальной* (адиабатической) и *конечной* (радиационно-доминированной,  $a \propto \eta$ ) стадиях эволюции. Для каждой из вышеупомянутых асимптотик общее решение имеет вид:

$$\bar{q} = C_1 \sin \omega\eta + C_2 \cos \omega\eta, \quad (14)$$

где операторы  $C_{1,2}$  задают амплитуды *растущей* и *падающей* ветвей эволюции. В вакуумном состоянии начальная временная фаза поля произвольна:  $\langle |C_1^{(in)}|^2 \rangle = \langle |C_2^{(in)}|^2 \rangle$ . Однако после решения уравнения эволюции (9) получаем, что на радиационно-доминированной стадии в выигрыше остается лишь растущая ветвь возмущений:

$$\langle |C_1^{(out)}|^2 \rangle \gg \langle |C_2^{(out)}|^2 \rangle. \quad (15)$$

В результате, к моменту отсоединения излучения от вещества в эпоху рекомбинации, спектр излучения оказывается промодулирован с фазой  $k = n\pi\sqrt{3}/\eta_{\text{rec}}$ , где  $n$  – натуральное число.

Именно эти акустические колебания наблюдаются в спектрах анизотропии реликтового излучения и возмущений плотности, подтверждая тем самым квантово-гравитационное происхождение  $S$ -моды.

Таким образом, проблема образования начальных космологических возмущений и крупномасштабной структуры Вселенной сегодня в принципе решена. Окончательное подтверждение теории квантово-гравитационного рождения возмущений в ранней Вселенной получит после обнаружения  $T$ -моды, что может произойти уже в ближайшее время. Так, простейшая модель Большого взрыва (инфляция на массивном скалярном поле) предсказывает амплитуду  $T$ -моды всего лишь в 5 раз меньше амплитуды  $S$ -моды [9], что дает параметры  $r = 0,04$  и  $\gamma = 0,01$ . Современные инструменты и технологии вполне способны решить задачу о регистрации столь малых сигналов по данным наблюдений анизотропии и поляризации реликтового излучения.

### 3. Темная энергия

Понимание природы темной энергии (ТЭ) – слабовзаимодействующей физической субстанции, пронизывающей все пространство видимой Вселенной, – стоит сегодня на первом месте среди проблем космологии, а может быть, и всего естествознания. Эта проблема прежде всего касается исследователей, работающих на стыке физики элементарных частиц и космологии.

Дело в том, что известные энергетические масштабы, характерные для фундаментальных взаимодействий, составляют величины порядка 1 ГэВ (сильное взаимодействие), 100 ГэВ (электрослабое взаимодействие) и  $10^{19}$  ГэВ (гравитационное взаимодействие), и не было никаких оснований думать (исключая соображения, основанные на антропном принципе, см. [10]-[12]), что в природе имеется еще один, гораздо меньший масштаб энергий. Однако оказалось, что ТЭ характеризуется энергетическим масштабом  $E \sim 10^{-3}$  эВ (в единицах  $\rho_E = E^4$ ).

В связи с фундаментальностью проблемы и удивительными свойствами ТЭ важно понимать, какие именно данные наблюдательной космологии лежат в основе представления о ее существовании. Часто в качестве основного наблюдательного аргумента в пользу существования ТЭ приводят результаты наблюдений сверхновых типа Ia. Однако име-

ется целый ряд других, не менее серьезных аргументов, основанных на комбинациях космологических данных.

Один из независимых аргументов состоит в следующем. Еще к середине 1990-х годов анализ данных галактических каталогов по распределению материи в пространстве, использование совокупности различных методов определения массы кластеризованного ("сгущенного") вещества<sup>§</sup> совместно с измерениями анизотропии реликтового излучения и параметра Хаббла привели к признанию того, что полная плотностью массы нерелятивистской материи, из которой состоит неоднородная структура нашей Вселенной – галактики и их образования (группы, скопления, цепочки, стенки, сверхскопления, пустоты), – не превышает 30% от критической плотности  $\rho_c$ :

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} \lesssim 0,3, \quad (16)$$

где  $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G) \simeq 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>,  $H_0 \simeq 70$  км/с/Мпк – константа Хаббла.

Результат (16) – один из важнейших в современной космологии. Его довольно распространенная в течение длительного времени интерпретация состояла в том, что Вселенная обладает ненулевой пространственной кривизной. Действительно, если не вводить в рассмотрение ТЭ, то для открытой космологической модели уравнение Фридмана, записанное для современной эпохи, сводится к соотношению

$$\rho_c = \rho_m + \frac{3}{8\pi G R_\kappa^2}, \quad (17)$$

где  $R_\kappa$  – современный радиус кривизны пространства. В соответствии с (16) кривизна (второе слагаемое в правой части (17)) должна доминировать, составляя не менее  $0,7\rho_c$ .

Однако такая интерпретация сталкивалась с трудностями. Во-первых, с теоретической точки зрения заметную пространственную кривизну крайне трудно совместить с идеей инфляционной Вселенной: без специальной подгонки параметров инфляционные модели приводят к чрезвычайно малым значениям пространственной кривизны  $R_\kappa^{-2}$ . Во-вторых, современный возраст Вселенной в открытой модели без ТЭ составляет 11 млрд. лет, в то время как оценки времени существования

<sup>§</sup>Измерение пекулярных скоростей галактик в скоплениях и сверхскоплениях, гравитационное линзирование скоплений, измерения кривых вращения галактик, определение соотношения между светимостью и массой, измерение температуры рентгеновских скоплений и т. д.

наиболее старых объектов во Вселенной (например, шаровых звездных скоплений) давали и дают большие значения, 12-14 млрд. лет. Имелся и ряд других аргументов против открытой модели с большой пространственной кривизной.

Если пространственная кривизна отсутствует, то результат (16) говорит о том, что не менее 70% плотности энергии в современной Вселенной обусловлены наличием такой материи, которая не может быть возмущена гравитационными полями структур и остается "нескученной" в ходе космологической эволюции. Эти требования означают, что эффективное давление этой материи отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине, то есть  $p \approx -\rho$ . Это и есть темная энергия.

Модель с пространственной кривизной была окончательно отвергнута на основе результатов измерений анизотропии реликтового излучения, точнее, определения положения первого пика в угловом спектре анизотропии, наиболее чувствительного к значению пространственной кривизны. Благодаря этим измерениям стало ясно, что трехмерное пространство с высокой точностью евклидово (т.е.  $R_{\kappa}^{-1}$  близко к нулю). Ключевую роль здесь сыграли аэростатные эксперименты BOOMERANG и MAXIMA [13]-[17]. Впоследствии эксперимент WMAP и другие эксперименты подтвердили этот результат. Таким образом, суммарная плотность энергии всех видов материи действительно должна совпадать с критической плотностью, и, следовательно, ТЭ действительно имеется в природе.

Структурный аргумент, основанный на комбинации результатов измерения анизотропии и поляризации реликтового излучения и результатов, относящихся к крупномасштабной структуре Вселенной, является сегодня однозначным свидетельством существования ТЭ. Среди других аргументов упомянем наблюдаемый интегральный эффект Сакса-Вольфа, который в будущем должен стать одним из методов прецизионного измерения свойств ТЭ (например [18]).

#### 4. Квазифридмановская Вселенная

Обладая столь удивительными свойствами гравитационной устойчивости, темная энергия кардинально влияет на процесс генерации структур, подавляя рост возмущений плотности.

На стадии линейного развития возмущений расширение материи описывается неоднородным уравнением Фридмана [4, 5, 19], которым также можно пользоваться в отдельных областях Вселенной, где воз-

мущения еще не доросли до нелинейных значений. Рассмотрим простой вариант эволюции, когда нерелятивистская материя (темная материя и барионы) описывается пылевидной средой с нулевым давлением  $p_m = 0$ , а темная энергия представляет собой космологическую постоянную  $\Lambda$ :

$$\left(\frac{\dot{b}}{H_\Lambda}\right)^2 = \frac{c}{b} + b^2 - \kappa \equiv f^2(b) - \kappa(\mathbf{x}), \quad (18)$$

где  $b = b(t, \mathbf{x})$  это масштабный фактор объемного расширения материи (сопутствующая плотность материи равна  $\rho_m = 3cH_\Lambda^2/(8\pi Gb^3)$ ),  $H_\Lambda = H_0\sqrt{\Omega_E} \simeq 2 \times 10^{-4} \text{Мпк}^{-1}$  – константа Хаббла темной энергии, постоянная  $c \equiv \Omega_m/\Omega_E \simeq 0,39$ ,  $(t, \mathbf{x})$  – это лагранжевы координаты, сопутствующие веществу (скорость материи  $u_\mu = t_{,\mu}$ ), точка над переменной означает частную производную по времени  $t$ .

Произвольная малая функция пространственных координат  $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$  описывает локальную кривизну пространства. В случае пылевидной среды скаляр  $q = q(\mathbf{x})$  зависит только от пространственных координат и его связь с  $\kappa$  дается следующим соотношением:

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{2\Delta q}{3H_\Lambda^2}, \quad (19)$$

где  $\Delta$  означает пространственный лапласиан. Заметим, что функция

$$f^2(b) \equiv \frac{c}{b} + b^2 \geq 1 \quad (20)$$

имеет минимум  $f_{\min} \simeq 1$ , достигаемый при  $b_{\min}^{-1} \simeq 1,7$ . Первый и второй члены в правой части (20) соответствуют пылевидной среде и  $\Lambda$ -члену.

Нас интересуют области пространства с положительной правой частью уравнения (18):

$$\kappa(\mathbf{x}) < 1, \quad (21)$$

При этом условии плотность материи монотонно убывает со временем. Заметим, что (21) включает в себя как области сверхскоплений ( $\kappa > 0$ ), так и космологические "пустоты" ( $\kappa < 0$ ).

При  $\kappa = 0$  объемный и фоновый масштабные факторы совпадают (хотя анизотропия расширения остается большой):

$$b = a(t) \equiv \frac{1}{1+z}, \quad H \equiv H_\Lambda \frac{f(a)}{a}, \quad (22)$$

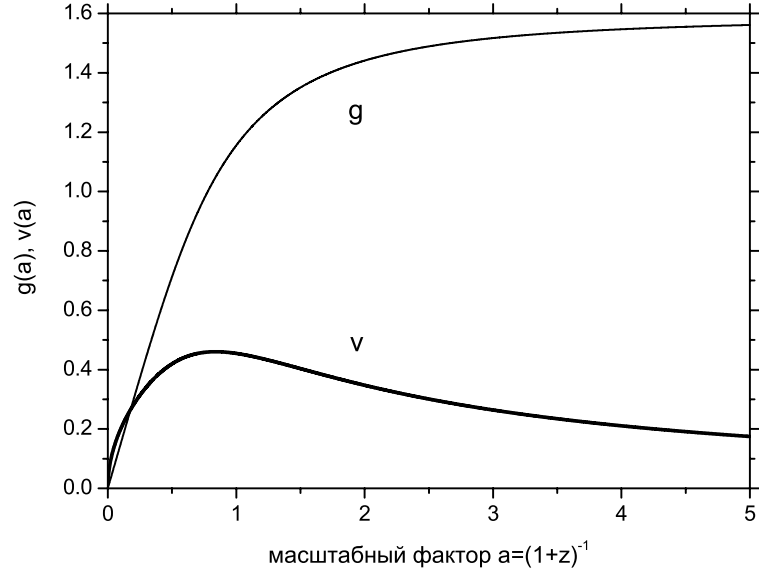


Рис. 1: Факторы роста возмущений плотности  $g(a)$  и пекулярной скорости материи  $v(a)$ .

где  $f = f(a)$  – фактор роста хаббловской части скорости ( $V_H = fH_\Lambda \mathbf{x}$ ).  
В общем случае в линейном порядке по  $\kappa$  получаем

$$b = a \left( 1 - \frac{1}{3} g \kappa \right), \quad \delta_m = g \kappa, \quad (23)$$

$$H_{\text{eff}} \equiv \frac{\dot{b}}{b} = H \left( 1 - \frac{1}{3} h \kappa \right), \quad h \equiv \frac{v}{f} = \frac{\dot{g}}{H}, \quad (24)$$

где  $\delta_m \equiv \delta \rho_m / \rho_m$  – сопутствующее возмущение плотности,  $H_{\text{eff}} = H_{\text{eff}}(t, \mathbf{x})$  – эффективная функция Хаббла,  $g = g(a)$  и  $v = v(a)$  – факторы роста возмущений плотности и пекулярной скорости материи:

$$g(a) = \frac{1}{c} \left( a - H \int_0^a \frac{da}{H} \right), \quad v(a) = \frac{3H_\Lambda}{2a^2} \int_0^a \frac{da}{H}. \quad (25)$$



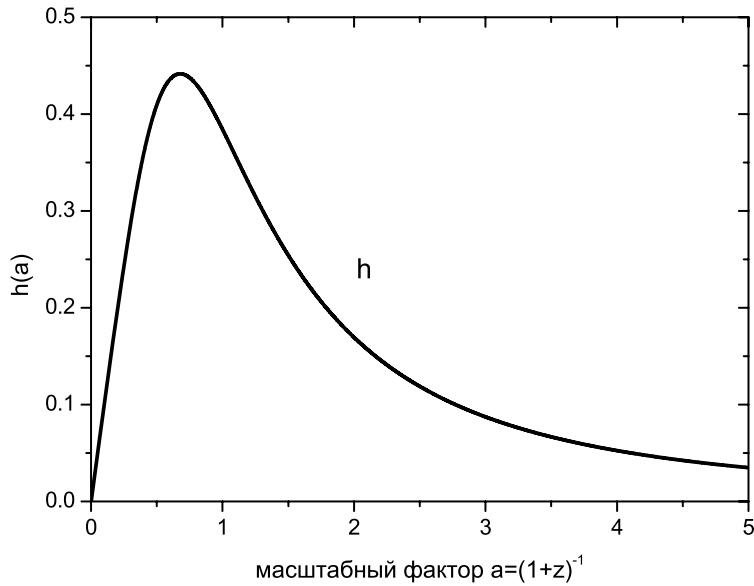


Рис. 2: Функция  $h(a)$  описывает отклонение локальной хаббловской функции от фоновой.

Уравнения (18)-(25) описывают квазихаббловские течения с эффективной хаббловской "константой"  $H_{\text{eff}}$ , зависящей от местоположения наблюдателя. Функции  $g(a)$  и  $v(a)$  изображены на Рис.1. В современную эпоху ( $a = 1$ ) функция  $v$  имеет широкий максимум, свидетельствующий о периоде наиболее интенсивной генерации структуры. Положение максимума  $v(a)$  соответствует  $z \simeq 0,2$ , уровень 0,9 от максимального значения достигается при  $a \simeq 0,5$  и 1,4, а половина – при  $a \simeq 0,1$  и 4.

Таким образом, современная эпоха – это эпоха максимальных пекулярных скоростей, которая продлится еще космологическое время. Функция  $v$  затухнет вдвое лишь к тому времени, когда возраст Вселенной будет составлять 35 млрд. лет. И только тогда можно будет говорить наступлении эпохи подавления пекулярных скоростей во всех областях пространства, где  $\kappa < 1$ .

Функция  $h(a)$ , определяющая степень отклонения локальной хаббловской "постоянной" от фоновой, представлена на Рис.2. Максимум  $h(a)$  достигается при  $z \simeq 0,4$ , а период  $h > 0,5$   $h_{\max}$  лежит в пределах  $a \in (0,1; 1,8)$ , что соответствует возрасту от 0,6 до 22 млрд. лет. Рис. 2 демонстрирует, что наша Вселенная находится на этапе максимального искажения хаббловского закона расширения, а восстановление хаббловских течений произойдет лишь через десяток миллиардов лет.

Подводя итог, мы можем заключить, что формирование крупномасштабной структуры во Вселенной происходит в период от 1 до 20 млрд. лет с момента Большого взрыва. Стадия подавления неоднородностей хаббловского потока из-за гравитационного влияния темной энергии еще не наступила.

Подчеркнем, что сделанные выше выводы о влиянии ТЭ на формирование структуры справедливы, если ТЭ является космологической постоянной (в точности выполняется соотношение  $p_E = -\rho_E$ ). В модели сверхслабого поля (квинэссенция, фантом и др.) плотность ТЭ также вначале постоянна, однако под действием собственной гравитации она будет уменьшаться в будущем.

Привлекательность идеи сверхслабого поля связана, в частности, с тем, что объяснить ненулевое, но невероятно малое по сравнению с масштабами энергий известных взаимодействий значение энергии вакуума чрезвычайно трудно. Гораздо проще представить себе, что энергия вакуума в начале эволюции Вселенной (задолго до известных стадий) релаксировала практически до нуля. В литературе имеются примеры соответствующих механизмов [20, 21].

Другая возможность состоит в том, что ускоренное расширение Вселенной обусловлено модификацией теории гравитации на сверхбольших расстояниях и космологических временах. Один из вариантов здесь связан с представлением о дополнительных пространственных измерениях бесконечного размера (например [22]), хотя до сих пор попытки построения соответствующих моделей сталкиваются с внутренними противоречиями. Более реалистичной с точки зрения теоретического воплощения возможностью является расширение ОТО до скалярно-тензорной теории гравитации [23, 24].

## 5. Заключение

Формирование крупномасштабной структуры Вселенной происходит в результате совместного действия двух совершенно различных физических механизмов: эффект квантово-гравитационного рождения безмассовых полей в ранней Вселенной обеспечивает первичные возмущения, а гравитационная неустойчивость превращает их в структуру. Причем последнее происходит только в том случае, если во Вселенной доминирует нерелятивистская материя. Таким образом, для образования нелинейной структуры нужны, вообще говоря, два условия: наличие длительного материально-доминированного периода и достаточно большая амплитуда начальных возмущений. В нашей Вселенной оба условия выполнены. Подчеркнем, что это выполнение никак не связано с антропным принципом, поскольку условие формирования звезд в нелинейных гало темной материи выглядит совсем по-другому:  $\rho_R \ll \rho_b \lesssim \rho_M$ .

Второй удивительный подарок природы состоит в том, что в настоящее время в спектре реликтового излучения мы можем воочию наблюдать возмущения, бывшие когда-то квантовыми. Это кроме всего прочего доказывает, что наши физические представления о микромире остаются справедливыми вплоть до периода, когда происходила бурная генерация возмущений.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (07-02-00886, 08-02-00090) и гранта НШ-2469.2008.2. Один из авторов (ВНС) также благодарит за поддержку фонд "Династия" и Учебно-научный комплекс ФИАН.

## Список литературы

- [1] Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М., *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат (1980)
- [2] Зельдович Я.Б., Старобинский А.А., *ЖЭТФ* **61**, 161 (1971)
- [3] Грищук Л.П., *ЖЭТФ* **67**, 825 (1974)
- [4] Лукаш В.Н., *ЖЭТФ* **79**, 1601 (1980)
- [5] Lukash V.N., *astro-ph/9910009* (1999)
- [6] Строков В.Н., *Астрон. Журнал* **84**, 483 (2007)
- [7] Лукаш В.Н., *УФН* **176**, 113 (2006)
- [8] Лукаш В.Н., Михеева Е.В., *УФН* **177**, 1023 (2007)

- [9] Lukash V.N., Mikheeva E.V., *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 3783 (2000)
- [10] Weinberg S., *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989)
- [11] Martel H., Shapiro P.R., Weinberg S., *Astrophys. J.* **492**, 29 (1998)
- [12] Linde A., in *Science and Ultimate Reality*, Eds. Barrow J.D. et al., Cambridge Univ. Press, 426 (2004)
- [13] Melchiorri A. et al. (Boomerang C.), *Astrophys. J.* **536**, L63 (2000)
- [14] de Bernardis P. et al. (Boomerang C.), *Nature* **404**, 955 (2000)
- [15] Lange A. E. et al. (Boomerang C.) *Phys. Rev. D* **63**, 042001 (2001)
- [16] Balbi A. et al., *Astrophys. J.* **545**, L1 (2000)  
Hanany S. et al., *Astrophys. J.* **545**, L5 (2000)
- [17] Jaffe A.H. et al. (Boomerang C.), *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3475 (2001)
- [18] Pogosian L., *New Astron. Rev.* **50**, 932 (2006)
- [19] Лукаш В.Н., Рубаков В.А., *УФН* **178**, 301 (2008)
- [20] Rubakov V.A., *Phys. Rev. D* **61**, 061501 (2000)
- [21] Steinhardt P. J., Turok N., *Science* **312**, 1180 (2006)
- [22] Deffayet C., Dvali G., Gabadadze G., *Phys. Rev. D* **65**, 044023 (2002)
- [23] Boisseau B. et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2236 (2000)
- [24] Gannouji R. et al., *JCAP* **09**, 016 (2006)

# От квазиклассики к периодической системе: опыт осмысления

К. С. Мамаева и Н. Н. Трунов<sup>а\*</sup>

<sup>а</sup> *ВНИИ метрологии им. Д. И. Менделеева,  
СПб, 198005 Московский пр., 19*

Введено эффективное квантовое число, упорядочивающее состояния в центрально-симметричном потенциале. На его основе изучены структура и количественные характеристики Периодической системы элементов, включая корреляции свойств.

## 1. Введение

По словам Мартина Хайдеггера — возможно, последнего великого философа — наука нового времени характеризуется подавляющим преобладанием вычисляющего мышления над осмысляющим мышлением. Ярким примером мыслителя осмысляющего типа является Д. И. Менделеев, создавший свою систему в условиях крайней скудости информации. Обходя модельные представления, он прокладывал по целине еще один путь к созданию квантовой механики — что позже осознали и использовали Н. Бор и В. Паули. Примером ученого, сочетавшего мощь вычислительного мышления с глубиной осмысляющего, является В. А. Фок — достаточно вспомнить его работы о роли приближенных методов и понятий в развитии науки.

Приятно отметить, что проф. А. А. Гриб, юбилею которого посвящен настоящий сборник, также представляет Петербургскую традицию осмысляющего мышления.

В настоящей заметке сделана попытка проследить цепочку действий, которая позволила рассмотреть Периодическую систему элементов (ПСЭ) как целое на относительно современном уровне. Дело в том, что встречающиеся в каждом учебнике несколько страниц «объяснения ПСЭ» по существу малосодержательны или даже некорректны. Во-первых, они сводятся обычно к наводящим соображениям, задним числом связывающим строение ПСЭ с размерностью представлений груп-

---

\*E-mail: trunov@vniim.ru

пы вращения, принципом Паули и т.п. Построение ПСЭ по этим соображениям невозможно. Во-вторых, игнорируется тот факт, что строение электронных оболочек - лишь небольшая часть содержащейся в ПСЭ информации: обычное ее использование в химии, металлургии и т.п. подразумевает учет совсем других свойств, преимущественно макроскопических. Таким образом, нужен конструктивный и достаточно простой подход для описания ПСЭ как целостного объекта с присущими ему количественными характеристиками, отличными от характеристик отдельных элементов. Ниже показано, как такой холистический подход может быть построен на основе приближенного квантовомеханического метода в духе осмысления В.А.Фока [1] для получения нового понятия эффективного квантового числа, управляющего строением как отдельного атома, так и ПСЭ в целом, а на последнем этапе - и с привлечением вероятностных соображений для доказательства действительного существования ПСЭ как целостного сложного объекта, хранящего данные о взаимозависимости разных свойств элементов. Естественно, при построении такой «сквозной» целостной картины не обойтись без упрощений. Удивительно не это, а то, что слегка идеализированная картина вполне адекватно описывает практически все стороны крайне сложного многоуровневого объекта.

Ориентируясь на квалифицированного читателя, мы обычно опускаем стандартные оговорки и уточнения. Отметим лишь известный факт: многие усложнения, как учет релятивистских поправок, характера связи и т.п. влияют на систематику уровней меньше, чем можно было бы ожидать. Подробности, доказательства, варианты метода и т.п. можно найти в [2-7] и ссылках там. Идея извлечения информации из ПСЭ как обратной задачи осмыслена в [8].

## 2. Основное условие квантования

Без потери общности можно записать уравнение для определения уровней энергии в потенциальной яме  $V(x)$  как

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\pi\beta} \int \sqrt{(\varepsilon - V)} dx = n + 1/2 + \delta(\varepsilon) + d(\varepsilon) \quad (1)$$

где сумма неизвестных пока функций  $\delta + d$  должна обеспечить точный спектр, интеграл берется между точками поворота,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и введен

параметр

$$\beta^2 = \frac{\hbar^2}{2m}. \quad (2)$$

Простейший выбор  $\delta \equiv d \equiv 0$  приводит к стандартному ВКБ условию с точным спектром лишь для осцилятора и кулона. Намного эффективнее выбор [2]:

$$\delta = \frac{2\delta_1}{1 + \sqrt{1 + 16\delta_1^2}}; \quad \delta_1 = \frac{\beta}{24\pi} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - V}} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2, \quad (3)$$

который сохраним и ниже. При  $d \equiv 0$  он обеспечивает точный спектр для всех потенциалов, которые выражаются через вспомогательную функцию  $s(x)$  в виде

$$V(x) = A^2 s^2 + Bs + C; \quad \sigma \equiv \frac{ds}{dx} = a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \quad (4)$$

Класс потенциалов (4), который далее обозначим Alg, - не просто один из возможных. Он охватывает все «эталонные» потенциалы, на которых в учебниках демонстрируются точные решения уравнения Шредингера (кроме тех, где спектр выражается через корни спецфункций). Для  $V \in \text{Alg}$  имеем:

$$\delta_1 = \frac{\beta a_2}{8A}, \quad (5)$$

так что  $\delta_1$  не зависит от энергии. Тот факт, что «эталонные» модельные потенциалы  $V \in \text{Alg}$  хорошо описывают типичные ситуации означает, что реальные потенциалы в некоторой метрике близки к Alg. Поэтому для них остается эффективным условие квантования (1), (3), где однако, теперь вступает в игру малая в меру малости отклонения от Alg поправка  $d(\varepsilon) \neq 0$ ,

$$|d(\varepsilon)| \ll |\delta(\varepsilon)|. \quad (6)$$

Для оценки и /или расчета  $d(\varepsilon)$  можно использовать разные варианты теории возмущений и интерполяционные методы. Существенно, что условие (1) с  $\delta$  (3) не является разложением по малому параметру  $\delta_1 \sim \beta$  и выдерживает предельный переход, когда из (3) имеем

$$\delta = \frac{\text{sgn}\delta_1}{2} - \frac{1}{8|\delta_1|}; \quad |\delta_1| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Соответственно поправка  $d$  уклонения от Alg также определяется «в целом» вне ряда по параметру  $\beta$ . Иными словами, условие (1),(3) может

быть названо квазиклассическим лишь в том смысле, что спектр выражается через явный вид  $V(x)$  (и конечного числа производных), что очень удобно в приложениях – смотри ниже. На самом деле условие (1), (3) равномоцно точному решению уравнения Шредингера (УШ) для  $V \in \text{Alg}$ , что может быть также выражено в эквивалентных формах: а) УШ для  $V \in \text{Alg}$  имеет вид гипергеометрического уравнения; б) спектр для  $V \in \text{Alg}$  может быть найден методом факторизации; в)  $V \in \text{Alg}$  принадлежит к классу суперсимметричных с аддитивным параметром. Условия (1), (3) делают ненужными вводимыми иногда ad hoc поправки к стандартному ВКБ. Что можно утверждать для потенциалов далеких от  $\text{Alg}$ ? В классе  $V \in \text{Alg}$  выражение  $\delta$  (3) есть сумма всего ряда теории ВКБ, в данном случае выражающаяся через  $\delta_1$ . В общем же случае исчезает малость  $d$  по метрическому отклонению, (6). Если сохранить вид  $\delta$  (3), то о  $d$  можем лишь утверждать, что  $d = O(\beta^3)$ . В качестве полезного примера рассмотрим

$$V(x) = -\frac{A^2}{ch^2px} = A^2(s^2 - 1), \quad s = thpx, \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{ds}{dx} = p(1 - s^2), \quad a_2 = -p.$$

Вычисляя (1), (3) с учетом (5) получим для спектра:

$$\frac{A - \sqrt{-\varepsilon_n}}{p\beta} = n + \frac{1}{2} - \frac{\beta p}{4A \left[ \sqrt{1 + \frac{\beta^2 p^2}{4A^2}} + 1 \right]}. \quad (9)$$

Отметим два обстоятельства. При максимальном значении энергии  $\varepsilon \approx 0$  полное число уровней  $N \approx n_{\max} = A/\beta p$ , если поправки невелики, т.е.  $N \gg 1$ . Разложение же поправки  $\delta$  идет по степеням  $\beta/A \approx N^{-1}$ . Т.е. фактически можно считать  $\beta = 1$  (или  $\hbar = 1$ ). В обратном случае малой амплитуды потенциала  $A \ll \beta$  – очень мелкая яма – согласно (7)  $\delta \rightarrow -1/2$  и сохраняется один уровень с  $n = 0$  и энергией  $-\varepsilon \sim O(A^4)$ . Этим свойством, общим для всех потенциальных ям с совпадающими высотами берегов

$$V(+\infty) = V(-\infty) = U \quad (10)$$

можно воспользоваться для уточнения формы  $\delta + d$  в условии (1). Удобно считать,  $\min V(x) = 0$ . Введем параметр [3]

$$q = -\frac{8\Phi(U)}{\delta_1} \quad (11)$$



с  $\Phi(\varepsilon)$  из (1) и  $\delta_1$  (3). Параметр  $q \equiv 1$  для всех  $V \in \text{Alg}$ , так что  $|q - 1|$  есть одна из возможных мер отклонения от  $\text{Alg}$ . Положим в (1)

$$\delta + d = \frac{2\delta_1}{q + \sqrt{(2-q)^2 + 16\delta_1^2}}. \quad (12)$$

При  $|\delta_1| \rightarrow \infty$ , т.е. мелкой яме, учет двух членов разложения (12) даст:

$$\delta + d = -\frac{1}{2} + \Phi(U),$$

что действительно обеспечит равенство левой и правой частей (1) для единственного уровня  $n = 0$ . Для  $V \in \text{Alg}$ , очевидно,  $q = 1$ , (12) и (3) совпадают, так что  $d \equiv 0$ .

Скажем кратко о точности условия (1). Стандартное ВКБ имеет абсолютную ошибку  $\delta + d$  или относительную  $(\delta + d)/(n + 1/2)$ . Улучшенное же условие с учетом  $\delta$  имеет соответственно меньшие ошибки для потенциалов, не слишком далеких от  $\text{Alg}$ :  $d$  или  $d/(n + 1/2)$ . Для  $V \in \text{Alg}$  в силу  $d \equiv 0$ , эта ошибка вообще исчезает. Очевидно, стандартная ошибка для  $V \in \text{Alg}$  равна  $\delta$  и исчезает тогда и только тогда, когда  $a_2 = 0$  (осциллятор, потенциал Морса). Обычные «качественные соображения», приводимые в учебниках для объяснения совпадения точных и стандартных ВКБ спектров, некорректны.

Отметим, что вместо условия (1) можно оставить стандартное, т.е. с  $\delta + d = 0$ , введя «квантовую» добавку к потенциалу [4].

### 3. Эффективное квантовое число для центрально-симметричных задач

Со времени работ О. Бора по ядерной физике возникает стремление найти некоторое квантовое число, линейное по радиальному  $n$  и орбитальному  $l$  числам, управляющее строением центрально-симметричных систем. Между тем известны только два точных спектра такого типа: для осциллятора в  $D$ -мерном пространстве

$$\varepsilon(n, l) = \text{const} \left[ n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right], \quad \lambda(D) = l + \frac{D-2}{2} \quad (13)$$

и аналогично для кулона. Далее для определения эффективного квантового числа  $T$  применим подход, аналогичный развитому в разделе 2.

Предварительно выполним конформное преобразование УШ, обеспечивающее расщепление угловых  $\Omega$  и радиальной координат в операторе Лапласа. Для новой метрики  $d\tilde{l}^2$  потребуем, чтобы

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = H^{-2} d\tilde{l}^2 = H^{-2} (d\rho^2 + d\Omega^2). \quad (14)$$

Отсюда  $H = \exp(-\rho)$  и  $\rho = \ln r$ . Выполняя обычные для конформных преобразований действия, получим радиальное УШ

$$\beta^2 \frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} + [W(\varepsilon, \rho) - \lambda^2 \beta^2] \Psi = 0, \quad (15)$$

$$W(\varepsilon, \rho) = e^{2\rho} [\varepsilon - V(e^\rho)] = r^2 (\varepsilon - V). \quad (16)$$

В метрике  $d\tilde{l}^2$  УШ в наибольшей возможной степени походит на УШ в равноправных декартовых координатах [5]. Побочное полезное следствие – впрочем, не выделяющее метрику (14) – исчезновение особой точки  $r = 0$ . Ввиду сходства (15) и (1) мы можем при фиксированном значении параметра энергии  $\varepsilon$ , выписать аналог (1), пока без  $\delta$  и  $d$ :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi\beta} \int \sqrt{W - \lambda^2 \beta^2} d\rho = n + \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Здесь учтено, что роль энергии в (15) играет  $-\lambda^2$ . Для дальнейшего необходимо представить  $I$  в виде:

$$I(\lambda) = I(0) - \varphi\lambda \quad (18)$$

так, чтобы погрешность линейной по  $\lambda$  аппроксимации была минимальной в некотором смысле. Очевидный вариант – потребовать среднеквадратичной минимизации:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} \int_0^\Lambda [I(\lambda) - I(0) + \varphi\lambda]^2 d\lambda = 0. \quad (19)$$

Здесь интегрирование идет до максимально возможного значения  $\Lambda$ ,

$$\beta^2 \Lambda^2 = \max W(\rho) \equiv W_m. \quad (20)$$

Такой способ приводит к значению

$$\varphi = \frac{3}{2} m_1 - m_3; \quad (21)$$

$$m_k = \int \left( \frac{W}{W_m} \right)^{\frac{k}{2}} d\rho. \quad (22)$$

Здесь подразумевается, что интегралы, взятые по всей классически доступной области, сходятся;  $m_k$  и, вообще говоря,  $\varphi$  зависят от  $\varepsilon$  как параметра. Легко проверить, что для кулона  $\varphi = 1$ , а для осциллятора  $\varphi = 1/2$  при  $D = 3$  независимо от энергии; при этом (18) является точным решением.

Был развит целый ряд различных подходов к определению разности  $I(\lambda) - I(0)$ , в том числе с нелинейной по  $\lambda$  аппроксимацией, что позволило не только проконтролировать точность, но и просто воспроизвести несколько важных неравенств, связывающих значения энергий с разными смежными  $n, l$  [6]; эти неравенства ранее составляли серьезные теоремы. Основное практическое значение имеет все же линейная аппроксимация (18).

Совершенно различные методы, в том числе нелинейные интегральные преобразования или использующие сопряженность УШ для степенных потенциалов с показателями  $s, t$  при  $(2+s)(2+t) = 4$ , приводят для весьма широкого круга актуальных модельных потенциалов к совпадающим с погрешностью порядка процента значениям  $\varphi$ . Это единообразие связано с быстрым выходом  $m_k$  на асимптотику уже при  $k \geq 1$ , так что потенциал посредством  $m_k$  и  $\varphi$  определяется одним-двумя параметрами (как правило,  $m_k$  выражаются через гамма-функции, обладающие аномально малыми коэффициентами в асимптотиках).

Таким образом, объективно существует эффективное квантовое число

$$T = n + 1/2 + \varphi \left( l + 1/2 \right), \quad (23)$$

позволяющее упорядочить уровни и вычислить с хорошей точностью значения их энергий из условия

$$\frac{1}{\pi\beta} \int \sqrt{W} d\rho = T. \quad (24)$$

При этом  $\varphi$  является часто более важной величиной, чем явный вид потенциала. Вообще говоря,  $\varphi$  является плавной функцией энергии, см. таблицы в [6]. В задачах с атомными потенциалами часто существенно лишь появление новых уровней, т.е.  $\varepsilon = 0$ .

Точное решение УШ (15) можно получить для  $W = -A^2 ch^{-2} p\rho$ . Очевидно, оно совпадает с (9) при замене  $\sqrt{-\varepsilon}$  на  $\beta\lambda$ . Последний член правой части (9) является поправкой  $\delta$  к  $T = n + 1/2 + \varphi\lambda$ ,  $\varphi = 1/p$

, малой по сравнению с фазовым интегралом  $(A/p\beta) \simeq T$ , именно  $\delta \simeq 1/(8T)$ . Заметим, что при  $p = 1/2$  и энергии  $\varepsilon = 0$  в (16) такой  $W$  соответствует в исходных координатах экранированному кулоновскому  $V = -[r(1+r^2)]^{-1}$ , со значением  $\varphi = 2$ , расходящимся с реальным для ПСЭ.

#### 4. Периодическая система оболочек

Выясним, в каком порядке открывается возможность заполнения оболочек  $(n, l)$  – т.е. совокупности связанных состояний с данными радиальными  $n$  и орбитальными  $l$  числами. Очевидно, эти оболочки появляются по мере роста  $T$  в (24), в момент открытия  $\varepsilon = 0$ . Мощность потенциала должна возрастать вместе с ростом  $T$ . При любом значении  $\varphi > 0$  минимум  $T$  достигается для  $(0,0)$  – эта оболочка открывается первой. Дальнейшее зависит от значения  $\varphi$  и наглядно изображается совокупностью прямых  $T(n, l, \varphi)$  на плоскости  $(T, \varphi)$ . Любой потенциал также может быть представлен на этой плоскости своей кривой [6].

Приведем фрагмент известного заполнения оболочек в ПСЭ, используя лексикографический порядок:

$$\begin{array}{cccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (n, 0) & (n-2, 3) & (n-3, 2) & (n-1, 1) \\
 (n+1, 0) & (n-1, 3) & (n_2, 2) & (n, 1) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

В каждом столбце значение  $T$  меняется на единицу в смежных оболочках. По существу эта схема является формальной, так как может включать клетки с  $n < 0$  – но именно эта формальная схема и является строго периодической. Для учета реального положения учтем емкость оболочек:

$$C(n, l) = 2(2l + 1), \quad n \geq 0; \quad C = 0, \quad n < 0, \quad (25)$$

т.е. фактически вычеркнем нефизические состояния. Эту реальную схему – с пропусками, разными длинами строк уже нельзя строго назвать периодической. Требование роста и невырожденности  $T$  в строке (25) приводит к условию  $5/3 < \varphi < 2$ ; ряд дополнительных аргументов ограничивает  $\varphi$  как

$$\varphi = 1,72 \pm 0,05. \quad (26)$$

Так, каждому значению  $T$  соответствует лишь одна оболочка в интервале  $5/3 < \varphi < 7/9$ . Между прочим, в этот интервал попадает  $\varphi$ , вычисленные для потенциала Томаса–Ферми:  $\varphi = 1,74$ .

Заметим, что уже при  $\varphi = 1,6$  последовательность заполнения оболочек, а с ней и вся ПСЭ, изменилась бы радикально. Между тем все «доказательства» и «объяснения» ПСЭ, приводимые в книгах, в равной мере остались бы применимы.

Надстроим над каждой оболочкой (в третьем измерении)  $C(l)$  состояний с последовательно увеличивающимся количеством электронов  $Z$  (и зарядом ядра) в заполняющейся оболочке. Так придем к слегка идеализированной ПСЭ, где каждый период - одна строка в матрице  $(n, l)$ . Разворот столбцов на плоскость дает стандартную длинную форму ПСЭ. В реальной ПСЭ имеется несколько небольших локальных иррегулярностей в заполнении (игнорируемые в графической форме ПСЭ; здесь возможна конкуренция близких состояний).

Всю совокупность атомов ПСЭ можно рассматривать как абстрактную систему – суператом, управляемый одной константой  $\varphi$ . Возможные его состояния маркируются числом  $Z$ .

## 5. Корреляция свойств и ПСЭ как целостный объект

Выше речь шла только о состояниях атомов в одноэлектронном приближении и – явно или неявно – модели самосогласованного потенциала. Между тем Д.И.Менделееву вообще были неизвестны эти понятия - он исходил из совокупности нескольких химических (валентность) и физических макроскопических свойств. Поэтому возникает особая задача – не замечаемая при стандартном «объяснении» ПСЭ: показать, что сконструированная на основе квантовой механики схема действительно содержит информацию о закономерном изменении свойств элементов. Именно это требуется для прогностического и других практических применений ПСЭ в химии, металлургии и т.п., например, для регулируемого изменения свойств сплавов (правда, анализ конкретных применений показывает наличие иррационального «алхимического» остатка в действиях практиков). Иными словами, требуется ввести и вычислить количественную характеристику, оценивающую ПСЭ как целостный объект. Были выбраны семь актуальных свойств элементов: пять

макроскопических – плотность, энтальпии, температуры плавления и кипения и два микроскопических – энергии ионизации и образования атома. Далее необходимо ввести коэффициенты корреляции между графиками каждого из свойств в разных периодах длинной формы ПСЭ, инвариантные относительно возможных преобразований шкал – упрощенно, единиц измерений – и вычислить их. Затем оценивалась вероятность случайного сходства графиков – универсальная характеристика ПСЭ как целого. Оказалось, что можно с уверенностью утверждать действительное сходство поведения всех этих свойств в разных периодах [7]. Такое сходство для макросвойств далеко не тривиально. Ведь форма ПСЭ диктовалась электронными состояниями атомов, а макросвойства – электродинамикой, статфизикой и т.п. Проследить эту связь через все опосредования – задача нереальной сложности.

В заключение отметим, что системный и алгебраический подход применим также для кластеров и других нанобъектов, для квантовых компьютеров и т.п. [7].

## Список литературы

- [1] В. А. Фок. *УФН XVI*, 1070 (1936).
- [2] N. N. Trunov. *arXiv*: 0812.1870 [math-ph] (2008).
- [3] N. N. Trunov. *arXiv*: 0811.4243 [quant-ph] (2008).
- [4] Н. Н. Трунов. *ТМФ 138*, 480 (2004).
- [5] К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов. *ТМФ 135*, 82 (2003).
- [6] А. А. Lobashev, N. N. Trunov. *arXiv*: 0710.5400 [math-ph] (2007).
- [7] В. С. Александров, Н. Н. Трунов, А. А. Лобашев. *Измерительная техника 4*, 3 (2008).
- [8] Ю. В. Тарбеев, Н. Н. Трунов, А. А. Лобашев, В. В. Кухарь. *ЖЭТФ 112*, 1226 (1997).

# New results in the theory of the Casimir force

V. M. Mostepanenko\*

*Noncommercial Partnership "Scientific Instruments", Tverskaya St. 11,  
Moscow, 103905, Russia*

We review some new developments in the Casimir effect which arises in quantization volumes restricted by material boundaries. The starting point of our discussion is the novel exact solution for the electromagnetic Casimir force in the configuration of a cylinder above a plate. The related work for the scalar Casimir effect in sphere-plate configuration is also considered. Next the complicated problem connected with the theory of the thermal Casimir force between real materials is analyzed. The present situation regarding different theoretical approaches to the resolution of this problem is summarized.

## 1. Introduction

The Casimir effect [1] is a particular type of vacuum polarization which arises in quantization volumes restricted by material boundaries due to distortions in the spectrum of zero-point oscillations of relativistic quantized fields in comparison with the case of free infinite Euclidean space-time. The polarization energy results in the Casimir force acting on the boundaries. The applications of the Casimir effect are extraordinary wide and range from condensed matter physics, atomic physics and nanotechnology to gravitation and cosmology (see monographs [2–5] and reviews [6–8]). This prospective subject has long been of concern to Prof. A. A. Grib [9].

During the last few years the Casimir force was measured with increased precision in configurations metal-metal [10–22] and metal-semiconductor [23–25]. The theory of the Casimir effect was widened to incorporate real material properties [7] and more complicated geometrical configurations [26, 27]. Much attention was given to the controversial problem of the thermal Casimir force between real metals (see discussion in Refs. [28, 29]) and dielectrics [30–32]. The results of precise measurements of the Casimir force

---

\*E-mail: Vladimir.Mostepanenko@itp.uni-leipzig.de

between metal surfaces were used for obtaining stronger constraints on the Yukawa-type corrections to Newtonian gravitational law predicted in unified gauge theories, supersymmetry and supergravity [19–22,33].

In the present paper we discuss the most important new results in the Casimir physics. In our opinion, the theoretical achievement of major significance is the obtaining the exact solution for the electromagnetic Casimir force in configuration of a cylinder above a plate [26] (see also further development of this matter in Ref. [27]). The related work was done for the scalar Casimir force in configurations of a sphere or a cylinder above a plate [27, 34]. In Ref. [35] the scalar Casimir effect in the same configurations was considered numerically using the worldline algorithms. The combination of the exact analytical and precise numerical methods permitted to make some conclusions on the validity limits of the so-called proximity-force theorem (PFT) which is heavily used in the experimental investigation of the Casimir force. All these results are discussed in Sec. 2.

The complicated theoretical problems related to the thermal Casimir force are discussed in Sec. 3. As underlined in this section, the theoretical approach proposed by some authors for real metals [29] is not only in contradiction to experiment, but unavoidably results in a violation of the Nernst heat theorem [28, 36, 37]. What is more, we stress that the same problems, as for real metals, arise for the Casimir force in configurations of two dielectrics and metal-dielectric if dc conductivity of a dielectric plate is taken into account [30–32]. This suggests that there are serious restrictions in a literal application of the Lifshitz theory to real materials. Some phenomenological approaches on how to avoid contradictions with thermodynamics and experiment proposed in literature are discussed.

Sec. 4 contains our conclusions and discussions.

## 2. New exact solutions for cylinder-plane and sphere-plane configurations

It is common knowledge that Casimir [1] found the exact expression

$$F(z) = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{z^4} \quad (1)$$

for the fluctuation force of electromagnetic origin per unit area acting between two plane-parallel ideal metal plates at a separation  $z$ . Lifshitz theory [38] generalized Eq. (1) for the case of two parallel plates described by a



frequency-dependent dielectric permittivity  $\varepsilon(\omega)$ . Experimentally it is hard to maintain the parallelity of the plates. Because of this, most of experiments were performed using the configuration of a sphere above a plate. The configuration of a cylinder above a plate also presents some advantages if to compare with the case of two parallel plates. Unfortunately, over many years it was not possible to obtain exact expressions for the Casimir force in these configurations. For this reason, the approximative proximity-force theorem [39] (usually referred to as *proximity force approximation* — PFA) was used to compare experiment with theory. According to the PFA, at short separations ( $z \ll R$ ) the Casimir forces between an ideal metal cylinder (per unit length) or a sphere and a plate are given by

$$F_c(z) = -\frac{\pi^3}{384\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R}{z}} \frac{\hbar c}{z^3}, \quad F_s(z) = -\frac{\pi^3}{360} \frac{\hbar c R}{z^3}, \quad (2)$$

where  $R$  is a sphere or a cylinder radius.

Within the PFA it is not possible to control the error of the approximate expressions in Eq. (2). From dimensional considerations it was evident [7] that the relative error in Eq. (2) should be of order of  $z/R$ , but the numerical coefficient near this ratio remained unknown. In fact, rigorous determination of the error, introduced by the application of the PFA, requires a comparison of Eq. (2) with the exact analytical results or with precise numerical computations in respective configurations. One such result for the electromagnetic Casimir effect was first obtained [26] for a cylinder above a plate using a path-integral representation for the effective action. Eventually, the Casimir energy is expressed through the functional determinants of infinite matrices with elements given in terms of Bessel functions [26]. The analytic asymptotic behavior of the exact Casimir energy at short separations was found in Ref. [27]. It results in the following expression for the Casimir force at  $z \ll R$ :

$$F_c(z) = -\frac{\pi^3}{384\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R}{z}} \frac{\hbar c}{z^3} \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \frac{20}{3\pi^2} - \frac{7}{36} \right) \frac{z}{R} \right]. \quad (3)$$

Eq. (3) is of much importance. It demonstrates that the relative error of the electromagnetic Casimir force between a cylinder and a plate calculated using the PFA is equal to  $-0.288618z/R$ . Thus, for typical parameters of  $R = 100 \mu\text{m}$  and  $z = 100 \text{ nm}$  this error is approximately equal to only 0.03%.

For a sphere above a plate the analytic solution in the electromagnetic case is not yet obtained. The scalar Casimir energy for a sphere above a

plate is found in Refs. [27] and [34]. The asymptotic expression at short separations with Dirichlet boundary conditions on a sphere and a plate is given by [40]

$$E_s(z) = -\frac{\pi^3}{1440} \frac{\hbar c R}{z^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{z}{R}\right). \quad (4)$$

In Ref. [35] the scalar Casimir energies for both a sphere and a cylinder above a plate are computed numerically using the worldline algorithms. It was supposed that a scalar field satisfies Dirichlet boundary conditions. As was noticed in Ref. [35], the Casimir energies for the Dirichlet scalar should not be taken as an estimate for those in electromagnetic case. In addition, it should be stressed that the errors of the PFA calculated in Ref. [35] are related to the Casimir energy and not to the experimentally measured Casimir force. This makes all errors larger. To illustrate, if we were considering the error of the PFA in application to the electromagnetic Casimir energy between a plate and a cylinder [instead of the force considered in Eq. (3)], the value of  $-0.48103z/R$  would be obtained as a negative error of the PFA [27]. The magnitude of the latter is by a factor of 1.6667 larger than the error obtained above for a force.

Eq. (3) confirms that PFT works well at short separations and reproduces the exact result with a very high precision. This justifies the use of the PFT for the interpretation of experimental data.

### 3. Problems in the theory of thermal Casimir force between real materials

During the last few years the problem of the thermal Casimir force was hotly debated. Until 2005, only the case of two plates made of real metal was the subject of controversy. In 2005 it was shown, however, that the case of two dielectric plates leads to problems as well [30].

We start from the Lifshitz formula for the free energy of the van der Waals (Casimir) interaction between two semispaces with a gap of width  $z$  in thermal equilibrium at temperature  $T$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, T) = & \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{l0}\right) \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \\ & \times \left\{ \ln \left[1 - r_{\text{TM}}^2(\xi_l, k_{\perp}) e^{-2q_l z}\right] + \ln \left[1 - r_{\text{TE}}^2(\xi_l, k_{\perp}) e^{-2q_l z}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Here  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $\xi_l = 2\pi k_B T l / \hbar$  are the Matsubara frequencies,  $q_l = (k_\perp^2 + \xi_l^2 / c^2)^{1/2}$ ,  $k_\perp$  is the projection of the wave vector on the boundary planes of semispaces, and  $r_{\text{TM,TE}}(\xi_l, k_\perp)$  are the reflection coefficients for two independent polarizations of the electromagnetic field (transverse magnetic and transverse electric modes).

In the original formulation of the Lifshitz theory the semispace material is described by using the approximation of dielectric permittivity  $\varepsilon(\omega)$  depending only on the frequency, and the continuity conditions

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad B_{1t} = B_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (6)$$

for the electric field, magnetic induction and electric displacement on boundary planes. Thus, the Lifshitz theory does not take into account the effects of spatial dispersion. In this model case the reflection coefficients take the form

$$r_{\text{TM}}(\xi_l, k_\perp) = \frac{\varepsilon_l q_l - k_l}{\varepsilon_l q_l + k_l}, \quad r_{\text{TE}}(\xi_l, k_\perp) = \frac{q_l - k_l}{q_l + k_l}, \quad (7)$$

where  $k_l = \sqrt{k_\perp^2 + \varepsilon_l \xi_l^2 / c^2}$  and  $\varepsilon_l = \varepsilon(i\xi_l)$ .

The central point of the debates is the term of Eq. (5) with  $l = 0$  (the so-called zero-frequency term). At large separations (high temperatures) it is dominant, and all terms with  $l \geq 1$  are negligibly small independently of the specific form of  $\varepsilon(\omega)$ . The case of ideal metal plates is obtained from Eqs. (5), (7) using the so-called Schwinger prescription [5, 41], i.e., that one should take limit  $\varepsilon \rightarrow \infty$  first and set  $l = 0$  afterwards. Using this prescription, for ideal metal plates one obtains

$$r_{\text{TM}}(0, k_\perp) = 1, \quad r_{\text{TE}}(0, k_\perp) = -1. \quad (8)$$

The same result follows for ideal metal independently of the Lifshitz formula from thermal quantum field theory with boundary conditions in the Matsubara formulation. Thus, at large separations (in fact at separations larger than  $6 \mu\text{m}$  at  $T = 300 \text{ K}$ ) it follows

$$\mathcal{F}(z, T) = -\frac{k_B T}{8\pi z^2} \zeta(3), \quad (9)$$

where  $\zeta(3)$  is the Riemann zeta function. Notice that Eq. (9) is in agreement with the classical limit based on the Kirchhoff's law [42, 43].

Refs. [44–47] (see also Ref. [29]) suggested to calculate the thermal Casimir force by describing the properties of real metals at low frequen-

cies via the dielectric permittivity of the Drude model

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\xi [\xi + \gamma(T)]}, \quad (10)$$

where  $\omega_p$  is the plasma frequency and  $\gamma(T)$  is the relaxation parameter. Substituting Eq. (10) in Eq. (7) we obtain

$$r_{\text{TM}}(0, k_\perp) = 1, \quad r_{\text{TE}}(0, k_\perp) = 0. \quad (11)$$

Eq. (11) is preserved also in the limit of ideal metal plates, and is thus in contradiction with Eq. (8). From Eqs. (5) and (11) at large separations one arrives at the result

$$\mathcal{F}(z, T) = -\frac{k_B T}{16\pi z^2} \zeta(3) \quad (12)$$

instead of Eq. (9). This result is in contradiction with the classical limit.

Real metals in the frequency region of infrared optics are well described by the dielectric permittivity of the plasma model

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\xi^2}. \quad (13)$$

If one extrapolates this model to low frequencies, the reflection coefficients become [48, 49]

$$r_{\text{TM}}(0, k_\perp) = 1, \quad r_{\text{TE}}(0, k_\perp) = \frac{k_\perp - \sqrt{c^2 k_\perp^2 + \omega_p^2}}{k_\perp + \sqrt{c^2 k_\perp^2 + \omega_p^2}}. \quad (14)$$

In the limiting case of ideal metal plates it holds  $\omega_p \rightarrow \infty$  and Eq. (14) agrees with Eq. (8) because  $r_{\text{TE}}(0, k_\perp) \rightarrow -1$ . At large separations the plasma model leads to Eq. (9) in agreement with the classical limit.

It is notable that the plasma model predicts small thermal corrections to the Casimir force at short separations in qualitative agreement with the case of ideal metals (a fraction of a percent at separations below  $1 \mu\text{m}$ ). Much larger thermal corrections at short separations are predicted by using the Drude model (19% of the force at  $z = 1 \mu\text{m}$ ).

As was mentioned above, the dielectric permittivity depending on the frequency provides only an approximative description of metals because it

disregards the effects of spatial dispersion. Another approximative description of metals is provided by the Leontovich impedance boundary condition

$$\mathbf{E}_t = Z(\omega) [\mathbf{B}_t \times \mathbf{n}], \quad (15)$$

where the index  $t$  labels the field components tangential to the plates,  $\mathbf{n}$  is the unit vector directed into the medium, and impedance function  $Z(\omega)$  is found from the solution of kinetic equations [50]. It is notable that the Leontovich impedance is well defined even in some frequency regions (for example, in the region of the anomalous skin effect in which the spatial dispersion is present) where the description in terms of  $\varepsilon(\omega)$  is not possible. At the same time, the Leontovich impedance is not applicable at separations  $z < \lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ , where the inequality  $Z \ll 1$  may be violated and the boundary condition (15) cannot be used. In the frequency regions where both quantities are well defined it holds  $Z(\omega) = 1/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ .

In terms of Leontovich impedance, the reflection coefficients in the Lifshitz formula take the form [51, 52]

$$r_{\text{TM}}(0, k_\perp) = \frac{cq_l - Z_l \xi_l}{cq_l + Z_l \xi_l}, \quad r_{\text{TE}}(0, k_\perp) = \frac{cq_l Z_l - \xi_l}{cq_l Z_l + \xi_l}, \quad (16)$$

where  $Z_l = Z(i\xi_l)$ . The zero-frequency values of these reflection coefficients depend on the form of impedance function used. For the impedance function of the normal and anomalous skin effect [50], one reobtains Eq. (8) obtained previously for ideal metals. For the impedance function of the infrared optics it follows that

$$r_{\text{TM}}(0, k_\perp) = 1, \quad r_{\text{TE}}(0, k_\perp) = \frac{ck_\perp - \omega_p}{ck_\perp + \omega_p}. \quad (17)$$

In the limit of ideal metal plates  $\omega_p \rightarrow \infty$  and Eq. (17) coincides with Eq. (8). The Leontovich impedance leads to almost the same results for the thermal Casimir force as the plasma model, i.e., to small thermal corrections to the zero-temperature force at short separations and to Eq. (9) at large separations.

From the above it is seen, that there are three theoretical approaches using the Drude model, the plasma model and the Leontovich impedance which lead to different predictions for the thermal Casimir force. There is also the similarity between the plasma model approach and the impedance approach which both predict small thermal effects at short separations and are in agreement with the classical limit at large separations. This is in

opposition to the Drude model approach which predicts relatively large thermal effect at short separations and is in violation of the classical limit at large separations.

As was analytically proved in Refs. [36, 53] (see also Refs. [28, 37]), the Drude model approach leads to a violation of the third law of thermodynamics (the Nernst heat theorem) in the case of metallic perfect lattices with no defects and impurities. For such lattices the relaxation parameter  $\gamma(T) \rightarrow 0$  when  $T \rightarrow 0$  in accordance with the Bloch-Grüneisen law and the entropy of a fluctuating field at zero temperature takes a negative value [28, 36, 37]

$$S(z, 0) = \frac{k_B}{16\pi z^2} \int_0^\infty y dy \ln \left[ 1 - \left( \frac{cy - \sqrt{4z^2\omega_p^2 + c^2y^2}}{cy + \sqrt{4z^2\omega_p^2 + c^2y^2}} \right)^2 e^{-y} \right] < 0, \quad (18)$$

instead of zero as is demanded by the Nernst heat theorem. At large separations from Eq. (18) it follows

$$S(z, 0) = -\frac{k_B\zeta(3)}{16\pi z^2} < 0, \quad (19)$$

i.e., what is called in Refs. [29,45–47] the entropy of a “modified ideal metal” (MIM) at zero temperature. Recent Refs. [29, 47] recognize that their MIM violates the Nernst heat theorem but argue[29] that “the crucial difference between real metals and MIM is that the former includes relaxation by which there will be no violation of the third law of thermodynamics”. This conclusion is wrong because Eq. (18) proves the violation of the Nernst heat theorem for Drude metals with dielectric permittivity (10). These metals have a finite permittivity at all frequencies with exception of zero frequency and a nonzero relaxation described by the relaxation parameter  $\gamma(T)$ . From this it follows that the Drude model approach violates the third law of thermodynamics for perfect metallic crystal lattices with no impurities but nonzero relaxation at any nonzero temperature. Thus, theoretically this approach is not acceptable.

Several attempts were made to avoid this conclusion. In Refs. [46, 54] the Drude model approach was applied to metallic lattices with defects and impurities possessing some residual relaxation  $\gamma(0) \neq 0$ . As a result, the equality  $S(z, 0) = 0$  was obtained which is in accordance with the Nernst heat theorem. This, however, does not solve the problem of the thermodynamic inconsistency of the Drude model approach, because metallic perfect

crystal lattice with no impurities has a nondegenerate dynamic state of lowest energy. Thus, according to quantum statistical physics, the entropy at  $T = 0$  must be equal to zero for such crystal lattices [a property violated by the Drude model approach according to Eq. (18)].

Another attempt [55] includes spatial dispersion in the calculations of the Casimir energy. At large separations it arrives at the same Eq. (12) as was obtained by using the Drude model. At arbitrary separations between the plates computations in Ref. [55] nearly exactly coincide with earlier computations [44] using the Drude model. In Refs. [32, 37, 56] it was demonstrated, however, that the results of Ref. [55] are not reliable because the used approximative description of a spatial dispersion is unjustified. The main mistake in Ref. [55] is that it uses the standard continuity boundary conditions (6) on the electromagnetic field which are valid only in the absence of spatial dispersion. If the spatial dispersion is present, one must use instead the more complicated conditions [57]

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad [\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (20)$$

where the induced charge and current densities are given by

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \operatorname{div} [\mathbf{n} \times [\mathbf{D} \times \mathbf{n}]] dl, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dl. \quad (21)$$

In the Reply [58] to the Comment [56] the author attempts to avoid this conclusion by introducing the auxiliary fields and by bringing the Maxwell equations to the form with no induced charge and current densities. This attempt, however, fails because, as the author himself recognizes, the relations used by him are valid only in the Fourier space. In the case of temporal dispersion there is no problem in making the Fourier transform. However, for spatial dispersion in the presence of boundaries and a macroscopic gap between the two plates, this is not allowed [56]. The system under consideration in the Casimir effect is not spatially uniform and it is not possible to introduce the dielectric permittivity  $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$  depending on both the wave vector and the frequency as is done in Refs. [55, 58].

Reply [58] denies the note in the Comment [56] that the formalism used in the original work [55] involves nonconservation of energy. In support of this denial, it is argued that the energy leaving a region through an interface is entering the region on the other side, and, thus, energy is fully

conserved. To arrive at this conclusion, the author admits that the in-plane components of the fields are continuous across the interface. In the presence of spatial dispersion this assumption is, however, not valid, as was demonstrated above. We underline that the violation of energy conservation in the so-called “dielectric approximation” of nonlocal electrodynamics used in Refs. [55, 58] has long been rigorously proved[59] and discussed in the literature [57].

To conclude, presently there is no question that the approach to the thermal Casimir force using the Drude model is thermodynamically invalid. At the same time, the plasma model and impedance approaches are consistent with thermodynamics. In particular, they satisfy the Nernst heat theorem [28, 37]. In Refs. [30–32] it was shown that the same problems, as for metals, arise for dielectrics if one describes their conductivity at zero frequency with the help of the Drude model.

Important problem is the comparison of different theoretical approaches to the thermal Casimir force with experiment. The computations at zero temperature, and also theoretical approaches using the plasma model and the Leontovich surface impedance at  $T = 300$  K, are consistent with experiment. At the same time, the theoretical approach using the Drude model is excluded by experiment at 95% confidence level within the separation region from 170 to 700 nm. In the separation region from 210 to 620 nm the Drude model approach is excluded by experiment at even higher 99.9% confidence level [20–22]. For the purposes of comparison between experiment and theory, the computations of the Casimir pressure were done by using the tabulated optical data for the complex index of refraction extended to lower frequencies. In fact, a marked difference between approaches arises only when calculating the contribution of the zero-frequency term in the Lifshitz formula which should be found theoretically because at very low frequencies optical data are not available.

One more important physical phenomenon which sheds light on the problem of the thermal Casimir force is the modulation of the Casimir force with laser light [25]. The experimental data of Ref. [25] are consistent with theory if the dc conductivity of high resistivity Si in the absence of laser light is discarded. On the contrary, if dc conductivity of a Si plate in the absence of laser light, as described using the Drude dielectric function, is included, the theory contradicts to the experimental data. Thus, for both metals and semiconductors the account of actual dielectric response at very low frequencies leads to contradictions between the Lifshitz theory and the experiment. To achieve an agreement between experiment and theory, one



should use the following phenomenological prescription [60, 61]. For metallic plates (whose conductivity remains nonzero when temperature vanishes) free charge carriers should be described by means of the plasma model. For dielectric plates (whose conductivity vanishes in the limit  $T \rightarrow 0$ ) dc conductivity arising at nonzero temperature should be neglected.

## 4. Conclusions and discussion

In the foregoing, we have discussed some recent achievements in the physics of the Casimir effect. In our opinion, the major theoretical breakthrough is the obtaining of the exact analytical solution for the electromagnetic Casimir energy in the configuration of an ideal metal cylinder above a plate. The resolution of this problem opened new opportunities for the investigation of the Casimir force between curved boundaries and permitted find first indisputable result on the accuracy of the PFA.

The last years were marked by controversial discussions of different approaches to the theoretical description of the thermal Casimir force. During these discussions it was clearly demonstrated that all the proposed approaches are of approximate phenomenological character. None of them can yet claim to be the final fundamental resolution of the problem. It was conclusively demonstrated that the Drude model approach is in contradiction with the foundations of thermodynamics and is excluded experimentally at a 99.9% confidence level. Important theoretical problem for future is the fundamental understanding of the thermal Casimir force and related physical phenomena caused by vacuum and thermal oscillations of the electromagnetic field (e.g., atomic friction, radiative heat transfer etc.). The experimental challenge for near future is the measurement of the thermal effect in the Casimir force between two macroscopic bodies which has not been measured yet.

Both recent theoretical achievements and the performed experiments confirm the unique potential of the Casimir effect both in fundamental physics for constraining predictions of new unification physical theories beyond the Standard Model and in nanotechnology for fabrication, operation and control of a new generation of microdevices. This confirms the increasing role of the Casimir effect both in modern physics and in technological applications.

## References

- [1] H. B. G. Casimir. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948).
- [2] P. W. Milonni. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics*. San Diego: Academic Press, 1994.
- [3] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov. *The Casimir Effect and its Applications*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [4] M. Krech. *The Casimir Effect in Critical Systems*. Singapore: World Scientific, 1994.
- [5] K. A. Milton. *The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy*. Singapore: World Scientific, 2001.
- [6] M. Kardar and R. Golestanian. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1233 (1999).
- [7] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rep.* **353**, 1 (2001).
- [8] S. K. Lamoreaux. *Rep. Progr. Phys.* **68**, 201 (2005).
- [9] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko. *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*. St. Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing, 1994.
- [10] S. K. Lamoreaux. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997).
- [11] U. Mohideen and A. Roy. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549 (1998); G. L. Klimchitskaya, A. Roy, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **A60**, 3487 (1999).
- [12] A. Roy and U. Mohideen. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4380 (1999).
- [13] A. Roy, C.-Y. Lin and U. Mohideen. *Phys. Rev.* **D60**, 111101(R) (1999).
- [14] B. W. Harris, F. Chen and U. Mohideen, *Phys. Rev.* **A62**, 052109 (2000); F. Chen, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **A69**, 022117 (2004).
- [15] T. Ederth. *Phys. Rev.* **A62**, 062104 (2000).
- [16] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop and F. Capasso. *Science* **291**, 1941 (2001); *Phys. Rev. Lett.* **87**, 211801 (2001).
- [17] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio and G. Ruoso. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 041804 (2002).
- [18] F. Chen, U. Mohideen, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101801 (2002); *Phys. Rev.* **A66**, 032113 (2002).

- [19] R. S. Decca, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, D. López and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **D68**, 116003 (2003).
- [20] R. S. Decca, D. López, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause and V. M. Mostepanenko. *Ann. Phys. (N.Y.)* **318**, 37 (2005).
- [21] G. L. Klimchitskaya, R. S. Decca, E. Fischbach, D. E. Krause, D. López and V. M. Mostepanenko. *Int. J. Mod. Phys.* **A20**, 2205 (2005).
- [22] R. S. Decca, D. López, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **D75**, 077101 (2007); *Eur. Phys. J.* **C51**, 963 (2007).
- [23] F. Chen, U. Mohideen, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **A72**, 020101(R) (2005); **A74**, 022103 (2006).
- [24] F. Chen, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko and U. Mohideen. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 170402 (2006).
- [25] F. Chen, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko and U. Mohideen. *Optics Express* **15**, 4823 (2007); *Phys. Rev.* **B76**, 035338 (2007).
- [26] T. Emig, R. L. Jaffe, M. Kardar and A. Scardicchio. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080403 (2006).
- [27] M. Bordag. *Phys. Rev.* **D73**, 125018 (2006).
- [28] V. B. Bezerra, R. S. Decca, E. Fischbach, B. Geyer, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, D. López, V. M. Mostepanenko and C. Romero. *Phys. Rev.* **E73**, 028101 (2006).
- [29] J. S. Høye, I. Brevik, J. B. Aarseth and K. A. Milton. *J. Phys.* **A39**, 6031 (2006).
- [30] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **D72**, 085009 (2005).
- [31] G. L. Klimchitskaya, B. Geyer and V. M. Mostepanenko. *J. Phys.* **A39**, 6495 (2006).
- [32] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Int. J. Mod. Phys.* **A21**, 5007 (2006).
- [33] R. S. Decca, D. López, H. B. Chan, E. Fischbach, D. E. Krause and C. R. Jamell. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 240401 (2005).
- [34] A. Bulgac, P. Magierski and A. Wirzba. *Phys. Rev.* **D73**, 025007 (2006).

- [35] H. Gies and K. Klingmüller. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 220401 (2006); *Phys. Rev.* **D74**, 045002 (2006).
- [36] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, and C. Romero. *Phys. Rev.* **A69**, 022119 (2004).
- [37] V. M. Mostepanenko, V. B. Bezerra, R. S. Decca, E. Fischbach, B. Geyer, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, D. López and C. Romero. *J. Phys.* **A39**, 6589 (2006).
- [38] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Statistical Physics Pt. II*. Oxford: Pergamon Press, 1980.
- [39] J. Blocki, J. Randrup, W. J. Swiatecki and C. F. Tsang. *Ann. Phys.* (N.Y.) **105**, 427 (1977).
- [40] M. Bordag and V. Nikolaev. *J. Phys.* **A41**, 164002 (2008).
- [41] J. Schwinger, L. L. DeRaad and K. A. Milton. *Ann. Phys.* (N.Y.) **115**, 1 (1978).
- [42] J. Feinberg, A. Mann and M. Revzen. *Ann. Phys.* (N.Y.), **288**, 103 (2001).
- [43] A. Scardicchio and R. L. Jaffe. *Nucl. Phys.* **B743**, 249 (2006).
- [44] M. Boström and B. E. Sernelius. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4757 (2000).
- [45] J. S. Høye, I. Brevik, J. B. Aarseth and K. A. Milton. *Phys. Rev.* **E67**, 056116 (2003).
- [46] I. Brevik, J. B. Aarseth, J. S. Høye and K. A. Milton. *Phys. Rev.* **E71**, 056101 (2005).
- [47] I. Brevik, S. A. Ellingsen and K. A. Milton. *New J. Phys.* **8**, 236 (2006).
- [48] C. Genet, A. Lambrecht and S. Reynaud. *Phys. Rev.* **A62**, 012110 (2000).
- [49] M. Bordag, B. Geyer, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 503 (2000).
- [50] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Physical Kinetics*. Oxford: Pergamon Press, 1980.
- [51] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya and C. Romero. *Phys. Rev.* **A65**, 012111 (2002).
- [52] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **A67**, 062102 (2003).

- [53] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **A66**, 062112 (2002).
- [54] M. Boström and B. E. Sernelius. *Physica* **A339**, 53 (2004).
- [55] B. E. Sernelius. *Phys. Rev.* **B71**, 235114 (2005); *J. Phys.* **A39**, 6741 (2006).
- [56] G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. *Phys. Rev.* **B75**, 036101 (2007).
- [57] V. M. Agranovich and V. L. Ginzburg. *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons*. Berlin: Springer, 1984.
- [58] B. E. Sernelius. *Phys. Rev.* **B75**, 036102 (2007).
- [59] J. T. Foley and A. J. Devaney. *Phys. Rev.* **B12**, 3104 (1975).
- [60] V. M. Mostepanenko and B. Geyer. *J. Phys.* **A41**, 164014 (2008).
- [61] G. L. Klimchitskaya and B. Geyer. *J. Phys.* **A41**, 164032 (2008).

# Рождение частиц в космологии: Точные решения

Ю. В. Павлов\*

*Лаборатория теоретической физики им. А.А. Фридмана,  
Санкт-Петербург, Россия*

Представлен обзор случаев, допускающих точные решения задачи о рождении частиц в космологических моделях, в которых давление пропорционально плотности энергии. Рассмотрены радиационно-доминированная модель с  $a(t) \sim \sqrt{t}$ , вселенная де Ситтера, случаи масштабных факторов  $a(t) \sim t^{1/3}$ ,  $a(t) \sim t$ . Проанализирована модель с фантомной материей и  $a(t) \sim 1/|t|$  и показано, что в этом случае обратным влиянием рождения частиц на метрику можно пренебречь.

## 1. Введение

Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени активно развивается с 70-х годов прошлого столетия и в настоящее время является достаточно глубоко разработанной областью теоретической физики (см. монографии [1]–[3]), имеющей актуальные приложения к космологии и астрофизике. основополагающий вклад в эту область теоретической физики внесен А. А. Грибом и его учениками. Так, в статье [4] А. А. Грибом и С. Г. Мамаевым для описания рождения частиц гравитационным полем был предложен метод диагонализации гамильтониана, получены конечные выражения для плотности рожденных гравитационным полем частиц. Важное значение предложенного подхода связано с проблемой определения понятия элементарной частицы и вакуумного состояния в искривленном пространстве-времени. Это обусловлено отсутствием в искривленном пространстве группы симметрий, подобной группе Пуанкаре в пространстве Минковского. Если считать, что частице соответствует квант энергии, то согласно квантовой

---

\*present address: *ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия*  
E-mail: yuri.pavlov@mail.ru

механике наблюдение частиц в некоторый момент времени означает нахождение собственного состояния гамильтониана. Это автоматически учитывается в методе диагонализации гамильтониана [1], [2] (обобщение на случай неконформной связи скалярного поля с кривизной дано в [5]).

Числовые оценки показывают, что эффект рождения частиц в космологии будет мал для частиц с массами порядка массы протона. Однако, для масс частиц порядка масштаба Великого Объединения, число рождающихся во Фридмановской Вселенной частиц будет порядка числа Эддингтона-Дирака ( $\approx 10^{80}$ ) [6], [7]. Как показано в работах [8]–[10], рождение частиц таких масс гравитацией ранней Вселенной может быть использовано как в объяснении наблюдаемого барионного заряда, так и иметь отношение к происхождению космических лучей сверхвысокой энергии.

В данной статье дается обзор случаев, допускающих точные решения задачи о рождении частиц в космологических моделях, в которых давление пропорционально плотности энергии. К числу таких моделей относятся исключительно важная с точки зрения приложений радиационно-доминированная модель, а также Вселенная де Ситтера.

Статья организована следующим образом. Сначала, в разделе 2 кратко излагается необходимый теоретический материал по рождению скалярных частиц в однородных изотропных космологических моделях. Далее рассматриваются точные решения для случаев масштабных факторов  $a(t) \sim \sqrt{t}$  в разделе 3.1,  $a(t) \sim t^{1/3}$  в разделе 3.2,  $a(t) \sim t$  в разделе 3.3. Случай модели де Ситтера рассмотрен в разделе 3.4. Точное решение для космологической модели с фантомной материей и  $a(t) \sim 1/|t|$  рассмотрено в разделе 4, в котором получено выражение для плотности рожденных частиц и показано, что в этом случае обратным влиянием рождения частиц на метрику пространства-времени можно пренебречь.

В статье используется система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ . Знаки тензора кривизны и тензора Риччи выбраны так, что  $R^i_{jkl} = \partial_l \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{jk} - \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{jl}$ ,  $R_{ik} = R^l_{ilk}$ , где  $\Gamma^i_{jk}$  — символы Кристоффеля.

## 2. Скалярное поле в однородном изотропном пространстве

Рассмотрим комплексное скалярное поле  $\varphi(x)$  массы  $m$  с лагранжи-

аном

$$L(x) = \sqrt{|g|} [g^{ik} \partial_i \varphi^* \partial_k \varphi - (m^2 + \xi R) \varphi^* \varphi] \quad (1)$$

и соответствующим уравнением движения

$$(\nabla^i \nabla_i + m^2 + \xi R) \varphi(x) = 0, \quad (2)$$

где  $\nabla_i$  — ковариантные производные в  $N$ -мерном пространстве-времени с метрикой  $g_{ik}$ ,  $g = \det(g_{ik})$ ,  $R$  — скалярная кривизна,  $\xi = \text{const}$ . Случай  $\xi = 0$  соответствует минимальной связи с кривизной. Значение  $\xi = \xi_c = (N-2)/[4(N-1)]$  соответствует конформной связи ( $\xi_c = 1/6$  при  $N = 4$ ). Уравнение (2) конформно инвариантно, если  $m = 0$  и  $\xi = \xi_c$ .

Для однородного изотропного пространства-времени с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dl^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dl^2), \quad (3)$$

где  $dl^2$  — метрика  $(N-1)$ -мерного пространства постоянной кривизны  $K = 0, \pm 1$ , полная система решений уравнения (2) может быть найдена в форме

$$\varphi(x) = a^{-(N-2)/2}(\eta) g_\lambda(\eta) \Phi_J(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где

$$g_\lambda''(\eta) + \omega^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad (5)$$

$$\omega^2(\eta) = (m^2 + (\xi - \xi_c)R) a^2(\eta) + \lambda^2, \quad (6)$$

$$\Delta_{N-1} \Phi_J(\mathbf{x}) = -\left(\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 K\right) \Phi_J(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$J$  — набор индексов (квантовых чисел), нумерующих собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами  $\Delta_{N-1}$  в  $(N-1)$ -мерном пространстве.

В соответствии с методом диагонализации гамильтониана [2] функции  $g_\lambda(\eta)$  должны удовлетворять следующим начальным условиям [5]:

$$g_\lambda'(\eta_0) = i \omega(\eta_0) g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \omega^{-1/2}(\eta_0). \quad (8)$$

Если квантованное скалярное поле находится в вакуумном состоянии для момента времени  $\eta_0$ , то плотность числа пар частиц, рожденных к моменту времени  $\eta$ , может быть вычислена (для квазиевклидовой метрики с  $K = 0$ ) по формуле

$$n(\eta) = \frac{B_N}{2a^{N-1}} \int_0^\infty S_\lambda(\eta) \lambda^{N-2} d\lambda, \quad (9)$$



где  $B_N = [2^{N-3}\pi^{(N-1)/2}\Gamma((N-1)/2)]^{-1}$ ,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция,

$$S_\lambda(\eta) = |g'_\lambda(\eta) - i\omega g_\lambda(\eta)|^2 / (4\omega). \quad (10)$$

Как показано в [5],  $S_\lambda \sim \lambda^{-6}$  и интеграл в (9) сходиться при  $N < 7$ .

При  $N = 4$  и  $K = 0, -1$  для плотности числа рожденных пар частиц справедлива формула (см. [2])

$$n(\eta) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty S_\lambda(\eta) \lambda^2 d\lambda. \quad (11)$$

При  $K = 1$  (сферическое пространство) множество собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами  $\Delta_{N-1}$  дискретно и формула для плотности числа рожденных пар частиц в  $N = 4$  имеет вид (см. [2])

$$n(\eta) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \sum_{\lambda=1}^\infty S_\lambda(\eta) \lambda^2. \quad (12)$$

### 3. Точные решения в космологических моделях с $p = w\varepsilon$

Рассмотрим однородные изотропные космологические модели в которых давление фоновой материи  $p$  пропорционально плотности энергии  $\varepsilon$ , т.е.  $p = w\varepsilon$ , где  $w = \text{const}$ .

Уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -8\pi GT_{ik}, \quad (13)$$

с тензором энергии-импульса фоновой материи  $T_k^i = \text{diag}(\varepsilon, -p, \dots, -p)$  в метрике (3) принимают вид

$$\frac{c^2 + K}{a^2} = \frac{16\pi G \varepsilon}{(N-1)(N-2)}, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{a^2} \left[ c' + \frac{N-3}{2} (c^2 + K) \right] = \frac{8\pi G p}{N-2}, \quad (15)$$

где штрих обозначает производную по “конформному” времени  $\eta$  и  $c \equiv a'/a$ . Для  $p = w\varepsilon$  из (14), (15) получаем

$$c' = -\frac{1}{2}(N-3+w(N-1))(c^2+K), \quad (16)$$

$$\varepsilon' + c(N-1)(1+w)\varepsilon = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что плотность энергии фонового вещества изменяется по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-(1+w)(N-1)}, \quad (18)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon(a_0)$ , т.е. уменьшается с ростом  $a$ , при  $w > -1$ , постоянна, при  $w = -1$ , и возрастает с увеличением  $a$ , при  $w < -1$ .

Рассмотрим сначала космологические модели с плоскими пространственными сечениями ( $K = 0$ ) при  $w > -(N-3)/(N-1)$ .

При  $K = 0$  из (16) получим,

$$a = a_0 t^q = a_1 \eta^\beta, \quad (19)$$

где  $t, \eta \in (0, \infty)$ ,

$$q = \frac{2}{(N-1)(w+1)}, \quad \beta = \frac{q}{1-q} = \frac{2}{N-3+w(N-1)}, \quad (20)$$

$t = a_1 \eta^{\beta+1}/(\beta+1)$ ,  $a_0 = a_1^{1/(\beta+1)}(\beta+1)^{\beta/(\beta+1)}$ . В рассматриваемом интервале  $w \in (-(N-3)/(N-1), +\infty)$  показатели степеней в масштабном факторе изменяются в пределах  $q \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (0, +\infty)$ .

Выражение для числа пар частиц  $N_a(t) = n(t)a^3(t)$ , рожденных в объеме  $a^3(t)$  к моменту времени  $t$ , в рассматриваемом интервале  $q$  удобно записать в виде

$$N_a(t) = b_q^{(0)}(t) \cdot \left( \frac{a(t_C)}{t_C} \right)^{N-1}, \quad (21)$$

где  $t_C = 1/m$  — комптоновское время. Тогда  $b_q^{(0)}(t)/(1-q)^{N-1}$  — коэффициент пропорциональности между количеством рожденных пар частиц и числом причинно несвязанных областей  $N_c(t) = ((1-q)a(t)/t)^{N-1}$  в комптоновский момент времени после Большого взрыва. Верхний индекс (0) указывает, что рассматривается рождение скалярных частиц.

При  $0 < q < 1$  коэффициент  $b_q^{(0)}(t)$  при  $mt \gg 1$  не зависит от времени. Связь числа рожденных частиц с количеством причинно несвязанных областей во фридмановских космологических моделях в комптоновский момент времени отмечалась А. А. Грибом (см., например, [7]). Численные расчеты значений  $b_q^{(0)}$  представлены в работе [9] (см. также [11]).

Рассмотрим в данном интервале  $w$  следующие два случая, допускающие точные решения уравнений для скалярного поля.

### 3.1 Точное решение для $a(t) = a_0\sqrt{t}$

Модель с масштабным фактором  $a(t) = a_0\sqrt{t} = a_1\eta$  является исключительно важной с точки зрения приложений, т.к. при  $K=0$  из (20) следует, что  $w = (5-N)/(N-1)$  и в четырехмерном пространстве-времени это соответствует радиационно-доминированной вселенной ( $w = 1/3$ ). Согласно стандартной космологической модели такая эпоха имела место в ранней Вселенной после инфляционной стадии. Отметим, что при  $N = 5$  такой масштабный фактор имеет место для пылевидной  $p = 0$  фоновой материи и  $K = 0$ .

Для скалярного поля с конформной связью  $\xi = \xi_c$  с кривизной уравнение (5) в рассматриваемом случае принимает вид

$$g''(\eta) + (m^2 a_1^2 \eta^2 + \lambda^2) g(\eta) = 0. \quad (22)$$

Начальные условия для скалярного поля с конформной связью могут быть поставлены и при  $\eta \rightarrow 0$ , т.е. вблизи сингулярности  $a = 0$

$$|g_\lambda(0)| = 1/\sqrt{\lambda}, \quad g'_\lambda(0) = i\sqrt{\lambda}g_\lambda(0). \quad (23)$$

Решение уравнения (22) с начальными условиями (23) может быть представлено в виде [18]

$$g_\lambda(t) = \frac{e^{i(mt+\alpha_0)}}{\sqrt{\lambda}} \left[ \Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\delta^2, \frac{1}{2}; -i2mt\right) + i2\delta\sqrt{mt} \Phi\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{2}\delta^2, \frac{3}{2}; -i2mt\right) \right], \quad (24)$$

где  $\Phi(a, b; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера,  $\delta \equiv \lambda/(ma(t_C))$  — имеет смысл физического импульса в комптоновский

$t_C = 1/m$  момент времени в единицах  $m$ ,  $\alpha_0$  — произвольная вещественная постоянная, значение  $\alpha_0 = 0$  соответствует условию  $g_\lambda(0) = 1/\sqrt{\lambda}$ . Представление для (24) через функции параболического цилиндра дано в [12]. Асимптотическое выражение для функции (10)  $S_\lambda(\eta)$  при  $mt \gg 1$  имеет вид

$$S_\delta = \frac{\pi}{\sqrt{2}\delta} \exp\left(-\frac{\pi\delta^2}{2}\right) \left| \frac{(1-i)\delta}{2\Gamma((3-i2\delta^2)/4)} - \frac{1}{\Gamma((1-i2\delta^2)/4)} \right|^2. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (10) и вычисляя в случае  $N = 4$  интеграл (11), получим зависимость коэффициента  $b_{1/2}^{(0)}(t)$  (см. (21)) от времени, представленную на Рис. 1, слева. Пунктирная прямая соответствует асимптотическому значению  $b_{1/2}^{(0)} \approx 5,286 \cdot 10^{-4}$ , которое может быть получено интегрированием (25) в (11). Впервые  $b_{1/2}^{(0)} \approx 5,3 \cdot 10^{-4}$  вычислено в [12].

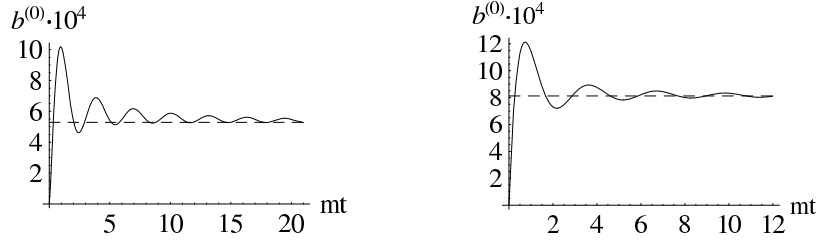


Рис. 1: Зависимость коэффициента  $b_q^{(0)}(t)$  от времени для  $q = 1/2$  (слева) и  $q = 1/3$  (справа).

Как видно из Рис. 1, рождение частиц происходит главным образом вблизи комптоновского времени  $t_C = 1/m$  после Большого Взрыва. Это объясняется тем, что при меньших временах массой частиц можно пренебречь и скалярное поле в случае  $\xi = \xi_c$  становится конформно инвариантным. Для конформно-инвариантных полей в однородной изотропной метрике рождение частиц отсутствует. При  $mt \gg 1$  гравитационное поле становится слабым (работа приливных сил на комптоновской длине  $l_C = 1/m$  много меньше энергии покоя пары частиц  $2m$ ) и рождение массивных частиц прекращается.

### 3.2 Точное решение для $a(t) = a_0 t^{1/3}$

Модель с масштабным фактором  $a(t) = a_0 t^{1/3} = a_1 \sqrt{\eta}$  реализуется при  $K = 0$  и  $w = (7 - N)/(N - 1)$ . Для  $N = 4$  это вселенная с предельно жестким  $p = \varepsilon$  уравнением состояния.

Решение уравнения (5) с таким масштабным фактором и с начальными условиями (23) для скалярного поля с конформной связью с кривизной имеет вид (см. также [12])

$$g_\lambda(t) = \frac{\pi \delta^2 e^{i\alpha_0}}{\sqrt{3\lambda}} \sqrt{(mt)^{2/3} + \delta^2} \left[ C_1(\delta) J_{1/3} \left( ((mt)^{2/3} + \delta^2)^{3/2} \right) + C_2(\delta) J_{-1/3} \left( ((mt)^{2/3} + \delta^2)^{3/2} \right) \right], \quad (26)$$

где  $J_\nu(x)$  — функции Бесселя,

$$C_1(\delta) = J_{2/3}(\delta^3) + iJ_{-1/3}(\delta^3), \quad C_2(\delta) = J_{-2/3}(\delta^3) - iJ_{1/3}(\delta^3). \quad (27)$$

Как и в разделе 3.1,  $\delta \equiv \lambda/(ma(t_C))$ . Если произвольная вещественная постоянная  $\alpha_0$ , полагается равной нулю, то  $g_\lambda(0) = 1/\sqrt{\lambda}$ . Асимптотическое выражение для функции (10)  $S_\lambda(\eta)$  при  $mt \gg 1$  в данном случае имеет вид

$$S_\delta = \frac{\pi \delta^3}{24} \left| C_1(\delta) - C_2(\delta) - i\sqrt{3}(C_1(\delta) + C_2(\delta)) \right|^2. \quad (28)$$

Подставляя (26) в (10) и вычисляя в случае  $N = 4$  интеграл (11), получим зависимость коэффициента  $b_{1/3}^{(0)}(t)$  (см. (21)) от времени, представленную на Рис. 1, справа. Пунктирная прямая соответствует асимптотическому значению  $b_{1/3}^{(0)} = 8,125 \cdot 10^{-4}$ , которое может быть получено интегрированием (28) в (11). Как и в случае масштабного фактора  $a(t) = a_0 \sqrt{t}$ , рождение частиц и здесь происходит, главным образом, вблизи комптоновского времени  $t_C = 1/m$ .

### 3.3 Точное решение для $a(t) \sim t$

Если  $w = -(N - 3)/(N - 1)$ , то из уравнений Эйнштейна (16) следует, что  $a'/a = \text{const}$  и  $a = a_0 t = a_1 e^{a_0 \eta}$ . Если  $a_0 = 1$  и  $K = -1$ , то, в действительности, метрика (3) с таким масштабным фактором является плоской, а соответствующие координаты  $x^k$  описывают часть пространства Минковского (см., например, § 113 в [13]). При этом, как

следует из (14), плотность энергии  $\varepsilon = 0$ . Заметим, что если  $\varepsilon > 0$  и  $p \geq 0$ , то пространство-время, описываемое метрикой (3), в таком смысле нерасширяемо (см. § 5.3 в [14]). Четырехмерное гиперболическое пространство-время с  $a(t) = t$  известно как вселенная Милна.

В метрике (3) с  $a = a_0 t$  решение уравнения (5) с начальными условиями (8), заданными при  $mt \rightarrow 0$ , имеет вид

$$g_\lambda(t) = \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}}}{a_0} \Gamma\left(\frac{i\tilde{\lambda}}{a_0}\right) J_{i\tilde{\lambda}/a_0}(mt) e^{\alpha_0}, \quad (29)$$

где  $\alpha_0$  — произвольная вещественная постоянная,

$$\tilde{\lambda} = (\lambda^2 + (\xi - \xi_c)(N - 1)(N - 2)(a_0^2 + K))^{1/2} \quad (30)$$

и мы полагаем  $(\xi - \xi_c)(a_0^2 + K) \geq 0$ .

Для решения (29) из (9)–(12) следует, что при  $\xi = \xi_c$  плотность рождающихся квазичастиц  $n(t)$  не зависит от значения  $a_0$  для  $K = 0$ , а при  $N = 4$  и для  $K = -1$ . Независимо от  $a_0$  и  $K$  асимптотическое значение плотности рожденных квазичастиц (для  $N = 4$ ) равно

$$n(t) \approx \frac{m}{512\pi t^2}, \quad mt \gg 1. \quad (31)$$

Таким образом, отличный от нуля результат имеет место даже для вселенной Милна, где гравитационное поле отсутствует и рождения реальных частиц происходить не должно! Действительно, пространственно-временной анализ рождения частиц с помощью корреляционной функции, введенный в [15], показывает, что соответствующая корреляционная функция пары рожденных частиц экспоненциально мала на расстояниях, превышающих комптоновскую длину волны частицы. Это свидетельствует о том, что рожденные квазичастицы в данном случае представляют собой виртуальные пары с характерной длиной корреляции  $1/m$ .

### 3.4 Космологическая модель де Ситтера

Рассмотрим случай  $w = -1$  и  $K = 0$ . Тогда

$$a = a_1 e^{Ht} = -\frac{1}{H\eta}, \quad (32)$$

$t \in (-\infty, +\infty) \Leftrightarrow \eta \in (-\infty, 0)$ . Отметим, что соответствующие координаты  $x^k$  покрывают лишь часть пространства-времени де Ситтера 1-го рода [14] с кривизной  $R = N(N - 1)H^2$ .

Решения уравнения (5) с условиями (8) при  $\eta_0 \rightarrow -\infty$  имеют вид

$$g_\lambda(\eta) = \sqrt{-\frac{\pi\eta}{2}} e^{\frac{\pi}{2} \text{Im} \nu} H_\nu^{(2)}(-\lambda\eta) e^{i\alpha_0}, \quad (33)$$

где  $H_\nu^{(2)}(z)$  – функция Ханкеля,  $\alpha_0$  – произвольная вещественная постоянная,

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{M}{H}\right)^2}, \quad M = \sqrt{m^2 + (\xi - \xi_c)R}. \quad (34)$$

Предполагая далее, что  $m^2 + (\xi - \xi_c)R > 0$ , из (9), (10) и (33) получим

$$n = M^{N-1} \cdot F_N\left(\frac{M}{H}\right), \quad (35)$$

т.е. плотность числа рожденных частиц в пространстве де Ситтера не зависит от времени! Результат численного расчета для функции  $F_N(M/H)$  при  $N = 4$  представлен на Рис. 2

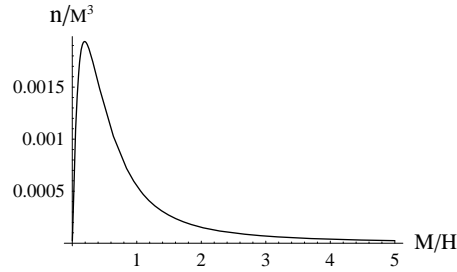


Рис. 2: Плотность рожденных квазичастиц в про-ве де Ситтера.

Однако, как показано в [16], корреляционная функция пары рожденных квазичастиц экспоненциально спадает на расстояниях между частицами пары, превышающих комптоновскую длину волны  $l_C = 1/M$ . Таким образом, рождения реальных частиц в пространстве де Ситтера не происходит. Рождающиеся пары квазичастиц, плотность которых показана на Рис. 2, следует интерпретировать как пары виртуальных частиц. Отметим, что этот вывод [16] имеет место как для конформных, так и для неконформных частиц. Как отмечено в [2], отсутствие рождения реальных частиц в пространстве де Ситтера подтверждается

локальным характером вакуумного тензора энергии-импульса и равенством нулю мнимой части эффективного лагранжиана.

#### 4. Рождение частиц в космологии с фантомной материей

Рассмотрим космологическую модель с фоновой материей с уравнением состояния  $p = w\varepsilon$ , где  $w < -1$ . Из уравнений Эйнштейна следует, что в метрике (3) плотность энергии такого фонового вещества растет по абсолютной величине при увеличении масштабного фактора (см. (18)).

При  $K = 0$  из (16) получим,

$$a = a_0/(-t)^{\tilde{q}} = a_1/(-\eta)^{\tilde{\beta}}, \quad (36)$$

где  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $\eta \in (-\infty, 0)$ ,

$$\tilde{q} = \frac{-2}{(N-1)(w+1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\tilde{q}}{1+\tilde{q}} = \frac{-2}{N-3+w(N-1)}, \quad (37)$$

$t = -a_1(-\eta)^{1-\tilde{\beta}}/(1-\tilde{\beta})$ ,  $a_0 = a_1^{1/(1-\tilde{\beta})}/(1-\tilde{\beta})^{\tilde{\beta}/(1-\tilde{\beta})}$ . В интервале  $w \in (-\infty, -1)$  показатели степеней в масштабном факторе изменяются в пределах  $\tilde{q} \in (0, +\infty)$ ,  $\tilde{\beta} \in (0, 1)$ .

Если  $w < -1$ , то имеется сингулярность “Big Rip” [17], при  $t \rightarrow -0$ .

Для значения  $w = -(N+1)/(N-1)$  ( $w = -5/3$  в четырехмерном пространстве-времени), когда  $\tilde{q} = 1$ ,  $\tilde{\beta} = 1/2$ , уравнение (5) для скалярного поля с конформной связью с кривизной может быть решено точно через вырожденные гипергеометрические функции (см. (2.1.2.103) в [18]). Решение, удовлетворяющее условиям (8) для  $\eta_0 \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$g_\lambda(\eta) = -2i\eta\sqrt{\lambda} \exp\left(-\frac{\pi m^2 a_1^2}{4\lambda} + i(\lambda\eta + \alpha_0)\right) \Psi\left(1 + \frac{im^2 a_1^2}{2\lambda}, 2; -2i\lambda\eta\right), \quad (38)$$

где  $\Psi(a, b; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми,  $\alpha_0$  — произвольная вещественная постоянная.

Введем  $p_\lambda = \lambda/(ma)$  — физический импульс  $\lambda/a$ , измеряемый в единицах  $m$ . Делая соответствующую замену переменных в (9), для плот-



ности числа рожденных частиц получим

$$n(t) = m^{N-1} \frac{B_N}{2} \int_0^\infty S_{p_\lambda(t)} p_\lambda^{N-2} dp_\lambda, \quad (39)$$

где в соответствии с (10) и (38)

$$S_{p_\lambda(t)} = \frac{p_\lambda}{16\sqrt{1+p_\lambda^2}} e^{\pi mt/(4p_\lambda)} \left| \left( i2mt \left( \sqrt{1+p_\lambda^2} - p_\lambda \right) - 4 \right) \times \right. \\ \left. \times \Psi \left( 1 - \frac{imt}{4p_\lambda}, 2; -ip_\lambda mt \right) - mt(mt + i4p_\lambda) \Psi \left( 2 - \frac{imt}{4p_\lambda}, 3; -ip_\lambda mt \right) \right|^2. \quad (40)$$

Найдем асимптотику  $S_{p_\lambda(t)}$  при  $t \rightarrow -0$ . Из формулы 6.7.(13) в [19] получим

$$\Psi(1 + \alpha z, 2; z) = \frac{1}{z \Gamma(1 + \alpha z)} + O(|z \ln z|), \quad z \rightarrow 0 \quad (41)$$

$$\Psi(2 + \alpha z, 3; z) = \frac{1}{\Gamma(2 + \alpha z)} \left( \frac{1}{z^2} - \alpha \right) + O(|z \ln z|), \quad z \rightarrow 0. \quad (42)$$

Поэтому

$$S_{p_\lambda(t)} \sim \frac{(\sqrt{1+p_\lambda^2} - p_\lambda)^2}{4p_\lambda \sqrt{1+p_\lambda^2}}, \quad t \rightarrow -0. \quad (43)$$

Подставляя (43) в выражение (39), для плотности числа рожденных частиц в  $N = 4$ , при  $t \rightarrow -0$ , получим

$$n = \frac{m^3}{24\pi^2}. \quad (44)$$

На Рис. 3 представлена зависимость плотности числа рожденных частиц от времени. Пунктирная прямая соответствует асимптотическому значению (44). Как видно из Рис. 3, рождение частиц происходит главным образом вблизи комптоновского времени  $t = -1/m$  перед моментом Большого Разрыва.

Несмотря на то, что общее число рожденных частиц  $N_a(t) = n(t)a^{N-1}(t)$  в лагранжевом объеме  $a^{N-1}(t)$  неограниченно возрастает ( $N_a(t) \sim |t|^{1-N}$ ), при  $t \rightarrow -0$ , их обратным влиянием на метрику пространства-времени можно пренебречь. Действительно, учтя, что

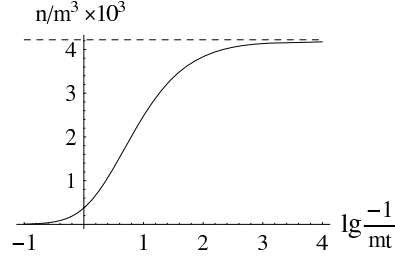


Рис. 3: Зависимость плотности рожденных частиц от времени ( $w = -\frac{5}{3}$ ).

энергии частиц, соответствующих диагональной форме гамильтониана, равны  $\omega/a$ , для плотности энергии рожденных пар частиц из (39) получим

$$\varepsilon_\varphi(t) = m^N \frac{B_N}{2} \int_0^\infty \sqrt{1 + p_\lambda^2} S_{p_\lambda}(t) p_\lambda^{N-2} dp_\lambda. \quad (45)$$

Поэтому из (18) и (43) следует, что отношение плотности энергии рожденных частиц в  $N = 4$  к плотности энергии фонового вещества в каждой  $p_\lambda$ -моды стремиться к нулю пропорционально  $t^2$ .

Таким образом, вывод о возможности пренебречь обратным влиянием рожденных частиц на метрику пространства-времени в моделях с фантомной материей, сделанный в [20] для безмассового минимально связанного скалярного поля, остается верным и для массивного скалярного поля в рассмотренной космологической модели с точным решением.

**Благодарности.** Автор благодарит проф. А. А. Гриба за многочисленные плодотворные и стимулирующие обсуждения по теме работы.

## Список литературы

- [1] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях (методы и результаты не связанные с теорией возмущений)*. М.: Атомиздат, 1980.
- [2] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988.

- [3] Н. Биррелл, П. Девис. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
- [4] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев. *Ядерная физика* **10**, 1276 (1969).
- [5] Ю. В. Павлов. *Теор. Матем. Физика* **126**, 115 (2001).
- [6] А. А. Grib, V. Yu. Dorofeev. *Int. J. Mod. Phys. D* **3**, 731 (1994).
- [7] А. А. Grib. *Early Expanding Universe and Elementary Particles*. St.Petersburg: Friedmann Laboratory Publ., 1995.
- [8] А. А. Grib, Yu. V. Pavlov. *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 433 (2002); **A 17**, 4435 (2002); *Gravit. & Cosmology* **8**, Suppl., 148 (2002).
- [9] А. А. Grib, Yu. V. Pavlov. *Gravit. & Cosmology* **14**, 1 (2008).
- [10] А. А. Grib, Yu. V. Pavlov. *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 1151 (2008); *Gravit. & Cosmology* **15**, 44 (2009).
- [11] V. Kuzmin, I. Tkachev. *Phys. Rev. D* **59**, 123006 (1999).
- [12] С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский. *ЖЭТФ* **70**, 1577 (1976).
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
- [14] С. Хокинг, Дж. Эллис. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
- [15] С. Г. Мамаев, Н. Н. Трунов. *Ядерная физика* **37**, 1603 (1983).
- [16] Yu. V. Pavlov. *Gravit. & Cosmology* **14**, 314 (2008).
- [17] R. R. Caldwell. *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002).
- [18] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [19] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции* Т. 1. Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
- [20] A. V. Batista, J. C. Fabris, S. J. M. Houndjo. *Gravit. & Cosmology* **14**, 140 (2008).

# Модель векторной квинтэссенции и проблема совпадения

Е. А. Поберий\*

*Лаборатория теоретической физики им. А. А. Фридмана,  
Санкт-Петербург, Россия*

Показано, что космологическое безмассовое векторное поле с неминимальным взаимодействием с кривизной позволяет объяснить современную стадию ускоренного расширения Вселенной.

## 1. Введение

Недавние космологические наблюдения [1]–[4] (см. также обзоры [5]) указывают на то, что Вселенная в настоящее время находится в стадии *ускоренного* расширения. Тот факт, что, вопреки ожиданиям, Вселенная ускоренно расширяется вместо того, чтобы замедляться, представляет наиболее важную проблему в современной космологии. В стандартной космологической модели наша Вселенная начинает расширяться после Большого взрыва, но вследствие притягивающего характера гравитации для обычной материи и излучения, расширение с необходимостью замедляется. Для того, чтобы получить наблюдаемое ускорение расширения, уравнения Эйнштейна требуют, чтобы во Вселенной доминировала некоторая необычная энергия (называемая тёмной энергией) с *отрицательным* давлением. Хотя природа тёмной энергии неизвестна, возможно её феноменологическое описание, в котором она понимается как космологическая постоянная, т.е., как идеальная жидкость с уравнением состояния  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , где  $\rho_\Lambda$  и  $p_\Lambda$  — плотность энергии и давление соответственно. Такое рассмотрение удовлетворяет наблюдениям с достаточно хорошей точностью ( $\Lambda$ CDM модель) и предполагает, что около 70% плотности энергии Вселенной сегодня должно быть в виде тёмной энергии, а остающиеся 30% составляет нерелятивистская материя, включая тёмную материю (вклад излучения и кривизны пренебрежимо мал) [5].

---

\*E-mail: eap@gmx.net

Однако, тот факт, что сегодня материя и тёмная энергия дают сравнимые вклады в полную плотность энергии (оба около  $(10^{-3} \text{ эВ})^4$  в  $\hbar = c = 1$  единицах) трудно объяснить в предположении, что тёмная энергия — это чистая космологическая постоянная. В самом деле, плотность энергии космологической постоянной остаётся неизменной на протяжении всей истории Вселенной, в то время как плотность энергии материи и излучения растёт при движении вспять по времени. Является ли просто совпадением то, что сегодня они одного порядка, хотя в прошлом различались на много порядков? Кроме того, масштаб космологической постоянной (около  $10^{-3} \text{ эВ}$ ) более чем на 30 порядков по величине меньше, чем масштаб других размерных постоянных, фигурирующих в гравитационных уравнениях ( $G = M_P^{-2}$ , где  $M_P \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$ ), что трудно объяснить в рамках известной физики.

Для преодоления этих трудностей были предложены модели, в которых тёмная энергия представлена динамическим полем, а не космологической постоянной. Эти модели обычно используют космологическое скалярное поле, называемое квинтэссенцией (quintessence [6],  $k$ -essence [7]) или некоторую модификацию ОТО [8, 9]. В простых моделях со скалярной квинтэссенцией уравнение состояния скалярного поля  $p = w\rho$  ограничено условием  $w \geq -1$ . Другой возможностью является так называемое фантомное скалярное поле, обладающее сверхотрицательным уравнением состояния  $w \leq -1$  из-за “неправильного” знака перед кинетическим членом в лагранжиане. В более общей модели с  $k$ -эссенцией ( $k$ -essence), описываемой лагранжианом с нелинейным кинетическим членом,  $w$  не ограничено условием быть больше или меньше  $-1$ . В рамках этой модели проблема совпадения решается наиболее общим образом, в то время как в простых моделях с квинтэссенцией или фантомным полем необходима точная подгонка параметров (fine tuning).

В последнее время активно исследуются модели с квинтэссенцией, представленной космологическим векторным полем [10]. Как показывают исследования, векторное поле является подходящим кандидатом на роль тёмной энергии и в принципе позволяет решить проблему совпадения.

В этой работе мы рассмотрим модель тёмной энергии, основанной на динамике безмассового векторного поля с неминимальным взаимодействием с кривизной.

## 2. Модель векторной квинтэссенции

Предположим, что Вселенная заполнена безмассовым векторным полем  $A_\mu$ , которое не взаимодействует с материей. Запишем действие в виде

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \nabla_\mu A_\nu \nabla^\mu A^\nu + \frac{k_1}{2} R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \frac{k_2}{2} R A_\mu A^\mu + L_m \right), \quad (1)$$

где  $R_{\mu\nu}$  - тензор Риччи,  $R$  - скалярная кривизна,  $L_m$  - лагранжиан материи.

Уравнения движения, следующие из этого действия, имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^A), \quad (2)$$

$$\square A_\mu + k_1 R_{\mu\nu} A^\nu + k_2 R A_\mu = 0. \quad (3)$$

Здесь  $T_{\mu\nu}^m$  - тензор энергии-импульса материи, определяемый из действия для материи  $S_m = \int L_m \sqrt{-g} d^4x$  как  $\delta S_m = 1/2 \int T_{\mu\nu}^m \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$ , а  $T_{\mu\nu}^A$  - тензор энергии-импульса поля  $A_\mu$ :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^A &= \nabla_\mu A_\lambda \nabla_\nu A^\lambda + \nabla_\sigma A_\mu \nabla^\sigma A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\alpha A^\beta + \\ &+ k_2 \left[ \phi \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + A_\mu A_\nu R + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \right] + \\ &+ k_1 \left\{ A^\alpha A^\beta \left( g_{\mu\alpha} R_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (A^\alpha A^\beta) + \right. \\ &\left. \nabla_\sigma \nabla^\sigma (A_\mu A_\nu) - \nabla_\sigma \nabla_\nu (A_\mu A^\sigma) - \nabla_\sigma \nabla_\mu (A_\nu A^\sigma)] \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\phi = A_\mu A^\mu$ .

Найдём решения этой модели в простейшем случае плоской однородной изотропной модели. Предположим, что пространственные компоненты векторного поля  $A_\mu$  исчезают, а его нулевая компонента зависит только от времени, т. е.,  $A_\mu = (A_0(t), 0, 0, 0)$ . Геометрия пространства-времени задана плоской метрикой Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \quad (5)$$

где  $a(t)$  - масштабный фактор.

В этой метрике уравнение (3) для поля  $A_\mu$  запишется в виде

$$\ddot{A} + 3H\dot{A} - 3[(k_1 + 2k_2)\dot{H} + (1 + k_1 + 4k_2)H^2]A = 0, \quad (6)$$

где  $H = \dot{a}/a$  - параметр Хаббла.

Уравнение (2) для (00) компоненты принимает вид

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_A), \quad (7)$$

где  $\rho_m$  — плотность энергии материи,  $\rho_A$  - плотность энергии поля  $A_\mu$ , которая в метрике (5) при условии  $A_\mu = (A_0(t), 0, 0, 0)$  имеет вид

$$\rho_A = \frac{3}{2} \left[ \dot{A}_0^2 - (1 + 6k_2)H^2 A_0^2 - 2(k_1 + 2k_2)(A_0^2 \dot{H} - A_0 \dot{A}_0 H) \right]. \quad (8)$$

Предположим, что эволюция Вселенной проходила последовательно через радиационно-доминированную и пылевую стадии, на которых вкладом тёмной энергии можно пренебречь. Тогда на этих стадиях расширения можно легко решить уравнение (6), просто полагая  $H = p/t$  ( $p = 1/2$  — для радиационно-доминированной стадии,  $p = 2/3$  — для пыли), что равносильно предположению  $a \propto t^p$ .

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$A_0(t) = A_0^+ t^{\alpha_+} + A_0^- t^{\alpha_-}, \quad (9)$$

где  $A_0^\pm$  - постоянные интегрирования. Подставляя (9) в (6), полагая  $H = p/t$ , получим уравнение для  $\alpha$ :

$$\alpha^2 + (3p - 1)\alpha - 3p[(1 + k_1 + 4k_2)p - (k_1 + 2k_2)] = 0, \quad (10)$$

имеющее решения

$$\alpha_\pm = \frac{-(3p - 1) \pm \sqrt{(3p - 1)^2 + 12p[(1 + k_1 + 4k_2)p - (k_1 + 2k_2)]}}{2}. \quad (11)$$

Будем использовать только растущие решения  $\alpha_+$ , поскольку убывающие решения не представляют интереса. Тогда имеем:

для радиационно-доминированной стадии ( $p = 1/2$ )

$$\alpha_+ = \frac{-1 + \sqrt{13 - 12k_1}}{4}; \quad (12)$$

для пылевой стадии ( $p = 2/3$ )

$$\alpha_+ = \frac{-3 + \sqrt{57 - 24k_1 + 48k_2}}{6}. \quad (13)$$

Полагая  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 1/2$ , получим <sup>†</sup>

$$\alpha_+ = \begin{cases} 0 & \text{- радиационно-доминированная стадия;} \\ \frac{-3 + \sqrt{57}}{6} \simeq 0.758 & \text{- пылевая стадия.} \end{cases} \quad (14)$$

Для плотности энергии поля  $A_\mu$  получим

$$\rho_A = \rho_{A0} a^n, \quad (15)$$

$n = -4$  для радиационно-доминированной стадии и  $n = (\sqrt{57} - 9)/2 \simeq -0.725$  для пыли.

Таким образом, на радиационно-доминированной стадии  $\rho_A/\rho_R = \text{const}$  ( $\rho_R$  — плотность энергии излучения). Однако, когда Вселенная переходит на пылевую стадию,  $\rho_A$  начинает расти относительно плотности материи и, в конце концов, превосходит её и становится доминирующей. С этого момента уже невозможно получить аналитические решения уравнений поля. Поскольку поле  $A_\mu$  постоянно на радиационно-доминированной стадии, задание его начального значения не зависит от выбора конкретного момента времени.

Запишем также эффективное уравнение состояния для поля  $A_\mu$ :

$$w_A = \frac{p_A}{\rho_A}, \quad (16)$$

где  $\rho_A$  дается выражением (8), а  $p_A$  имеет вид ( $p_A = -T_{A1}^1 = -T_{A2}^2 = -T_{A3}^3$ ):

$$p_A = \frac{1}{2} \left[ (1 - 6k_1 - 6k_2)H^2 A_0^2 - 4(k_1 + k_2)A_0^2 \dot{H} - 8(k_1 + k_2)H A_0 \dot{A}_0 + \right. \\ \left. + (1 - 2k_1 - 4k_2)\dot{A}_0^2 - 2(k_1 + 2k_2)A_0 \ddot{A}_0 \right]. \quad (17)$$

---

<sup>†</sup>Выбор  $k_1 = 1$  является вполне естественным, поскольку фактически член  $A^\mu A^\nu R_{\mu\nu}$  равен кинетическому члену  $A^\mu A^\nu R_{\mu\nu} \rightarrow (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 - \nabla_\alpha A^\beta \nabla_\beta A^\alpha$ , что легко установить из геометрического тождества  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu}A^\beta$  после интегрирования действия по частям. Численный же множитель перед кинетическим членом может быть фиксирован перенормировкой поля  $A_\mu$ .



При  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 1/2$ , получим

$$w_A = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{- радиационно-доминированная стадия;} \\ \simeq -0.632 & \text{- пылевая стадия.} \end{cases} \quad (18)$$

После того, как плотность энергии поля  $A_\mu$  становится доминирующей во Вселенной, решения уравнений модели нельзя представить в аналитическом виде. Однако численный анализ показывает, что эволюция Вселенной заканчивается в конечный момент времени  $t_{end}$  в сингулярности. Характер этой сингулярности такой, что в момент  $t_{end}$  масштабный фактор  $a(t_{end})$  остается конечным, а плотность энергии и давление поля  $A_\mu$ , которое на этом этапе играет роль тёмной энергии, - расходятся ( $\rho_A \rightarrow \infty$ ,  $p_A \rightarrow -\infty$ ,  $w \rightarrow -\infty$ ). Такая сингулярность относится к типу III (Big Freeze) по классификации работы [11].

### 3. Заключение

В настоящее время считается (см., например, [12]), что тёмная энергия с уравнением для параметра состояния  $w(z)$ , быстро меняющимся от пылевидного  $w \simeq 0$  при  $z \sim 1$  до фантомоподобного  $-1.2 \lesssim w \lesssim -1$  при  $z \simeq 0$ , наилучшим образом удовлетворяют данным наблюдений по сверхновым Ia и микроволновому фону.

В нашей модели параметр состояния  $w(z)$  изменяется от  $1/3$  на радиационно-доминированной стадии до  $\simeq -0.632$  на пылевой стадии и может пересечь так называемый “фантомный раздел” ( $w = -1$ ) при  $z \simeq 0$ . После этого Вселенная вступит в фантомно-доминированную стадию. Здесь возникают проблемы стабильности и сингулярности. Известно, что материя с  $w < -1$  нарушает сильное энергетическое условие, поэтому в таких моделях невозможно гарантировать стабильность вакуума уже на классическом уровне. Эта нестабильность также проявится и на квантовом уровне как распад вакуума на гравитоны и фантомные частицы с отрицательной энергией [13]. Поэтому для изучения стабильности нашей модели необходимо исследовать эволюцию возмущений как метрики, так и векторного поля  $A_\mu$ , что выходит за рамки данной работы. Кроме того, вблизи сингулярности типа Big Freeze плотность энергии возрастает до планковской, порождая тем самым вторичную эпоху квантовой гравитации. Здесь квантовые эффекты начинают играть определяющую роль и могут предотвратить развитие сингулярности. В изучении процессов вблизи будущей сингулярности неопцени-

мую помощь могут оказать методы, развитые в фундаментальном труде профессора А. А. Гриба с соавторами [14].

## Список литературы

- [1] S. Perlmutter et al. *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [2] A. G. Riess et al. *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); **117**, 707 (1999).
- [3] D. N. Spergel et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175, (2003); astro-ph/0603449.
- [4] M. Tegmark et al., *Phys. Rev.* **D69**, 103501 (2004).
- [5] А. Д. Чернин. *УФН*, **171**, 1153 (2001); **178**, 267 (2008).
- [6] C. Wetterich. *Nucl. Phys.* **B302**, 668 (1988); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [7] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov. *Phys. Lett.* **B458**, 209 (1999).
- [8] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M. S. Turner. *Phys. Rev.* **D70**, 043528 (2004).
- [9] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati. *Phys. Lett.* **B485**, 208 (2000).
- [10] T. S. Koivisto, D. F. Mota. Preprint arXiv:0805.4229.
- [11] S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Tsujikawa. *Phys. Rev.* **D71**, 063004 (2005).
- [12] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354**, 275 (2004).
- [13] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden. *Phys. Rev.* **D68**, 023509 (2003).
- [14] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988. English translation: A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko. *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, St. Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing, 1994.

# Light Front QCD Hamiltonian with Nontrivial Vacuum

E. V. Prokhvatilov\*

*Saint Petersburg State University*

A way of semiphenomenological description of vacuum effects in QCD, quantized on the Light Front (LF), is discussed. A proper modification of the canonical LF Hamiltonian for QCD is proposed.

## 1. Introduction

The quantization of Field Theory on the Light Front (LF) means the quantization on the hyperplane  $x^+ = 0$  in Dirac [1] “light cone” coordinates  $x^\pm = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$ , with the  $x^+$  playing the role of time. Field theory, quantized on the LF, formally has very simple description of the vacuum state, and the physical states can be described in the Fock space, constructed on this vacuum. Indeed, the LF momentum operator  $P_- = (P_0 - P_1)/\sqrt{2} \geq 0$  is nonnegative for states with  $p_0 \geq 0$ ,  $p^2 \geq 0$ . Like usual space momentum it is kinematical (quadratic in fields) generator of translations (in LF coordinate  $x^-$ ). The vacuum state can be identified with the eigenstate of the  $P_-$  with minimal eigenvalue  $p_- = 0$ .

Let us consider as an example the scalar field operator  $\Phi(x)$  at  $x^+ = 0$ . We can go to the  $p_-$  representation via the following form of Fourier decomposition:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{dp_-}{\sqrt{2p_-}} \left( a(p_-, x^\perp) e^{-ip_- x^-} + \text{h.c.} \right), \quad (1)$$

where  $a(p_-, x^\perp)$  and  $ia^+(p_-, x^\perp)$  enter into scalar field action as canonically conjugated variables on the LF which have  $p_- > 0$ :

$$[a(p_-, x^\perp), a(p'_-, x'^\perp)] = 0, \quad (2)$$

---

\*E-mail: Evgeni.Prokhvat@pobox.spbu.ru

$$[a(p_-, x^\perp), a^+(p'_-, x'^\perp)] = \delta(p_- - p'_-) \delta(x^\perp - x'^\perp). \quad (3)$$

The LF momentum operator is

$$P_- = \int dx^- \int d^2 x^\perp (\partial_- \Phi)^2 = \int d^2 x^\perp \int_0^\infty dp_- p_- a^+(p_-, x^\perp) a(p_-, x^\perp) \geq 0. \quad (4)$$

“Physical vacuum”  $|0\rangle$  is defined like “mathematical” one:

$$a(p_-, x^\perp)|0\rangle = 0, \quad p_- > 0. \quad (5)$$

This simplicity of the description of the vacuum is main advantage of the quantization on the LF.

The spectrum of bound states can be found nonperturbatively using the LF Fock space basis  $\{a^+ \dots a^+ |0\rangle\}$  by solving the following equations:

$$P_+ |\Psi\rangle = p_+ |\Psi\rangle, \quad P_- |\Psi\rangle = p_- |\Psi\rangle, \quad P_\perp |\Psi\rangle = 0. \quad (6)$$

Then  $m^2 = p^2 = 2p_+ p_-$ . This can be used in attempts to approach nonperturbatively to bound state problem in Quantum Chromodynamics (QCD).

Main difficulties of the LF quantization are related with the singularities at  $p_- \rightarrow 0$ .

Possible regularizations are

(a) cutoff in  $p_-$  ( $p_- \geq \varepsilon > 0$ ), or

(b) the “DLCQ” regularization (“DLCQ” means Discretized Line Cone Quantization), i.e. the cutoff in  $x^-$  ( $|x^-| \leq L$  plus periodic boundary conditions, and  $p_- = \frac{\pi n}{L}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). The  $p_- = 0$  mode in the DLCQ is to be expressed canonically through other modes (for gauge theory this was studied by Novozhilov, Franke, Prokhvatilov [2, 3]).

Both types of the regularization can break Lorentz symmetry. This destroys usual perturbative renormalization. The problem of restoring the symmetries, broken by the regularization on the LF, and proving the equivalence of usual and LF quantizations is rather difficult. Nevertheless it can be solved, at least perturbatively [4] (and to all orders in coupling constant [5]) via comparison of two Feynman perturbation theories: one generated by usual “equal time” quantization in Lorentz coordinates and one generated by the quantization on the LF. Such a comparison shows the necessity of adding to regularized canonical LF Hamiltonian unusual “counterterms” which restore the mentioned equivalence in perturbation theory in the limit of removing the regularization.

The “zero” modes (i.e.  $p_- = 0$  modes) and modes with  $p_-$  in the vicinity of the  $p_- = 0$  may be important for the description of nonperturbative vacuum effects like condensates. One may suggest that these vacuum effects can be described, at least semiphenomenologically, by a specific modification of the form of the QCD Hamiltonian on the LF. As a guide, one can use the study [6, 7] of this problem in two dimensional quantum electrodynamics QED(1+1) (massive Schwinger model). This model has gauge symmetry, nontrivial topological effects and confinement of fermions like the QCD. Furthermore, it has “dual” description in terms of scalar boson field. Such a description is nonperturbative from the point of view of usual QED(1+1) coupling and includes simple parametrization of the nonperturbative effects related with nontrivial topology of the vacuum in the original formulation of the QED(1+1).

In the result of this study [6, 7] we have found that correct description of QED(1+1) on the LF, including vacuum condensates within the DLCQ formulation, can be achieved by the specific modification of the original LF Hamiltonian by adding the terms which describe the “infrared” dynamics (related with  $p_- \rightarrow 0$ ). For example, in naive canonical formulation of QED(1+1) on the LF one has the constraint, which connects the  $\psi_-$  and  $\psi_+$  components of the bispinor field  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$  on the LF. In the LF gauge it has the following form ( $M$  is fermion mass):

$$\sqrt{2} \partial_- \psi_- - M \psi_+ = 0 \quad (7)$$

being the component of Dirac equation. “Zero” mode of the  $\psi_-$  is not constrained by this equation and could play some role in the description of the vacuum effects. In [6] we have found that for DLCQ formulation with antiperiodic in  $x^-$  field  $\psi$  (having no exact zero mode due to this antiperiodic boundary condition) one needs the following modification of this constraint :

$$\sqrt{2} \partial_- \psi_- - M \psi_+ + \frac{e e^C}{2\pi^{3/2}} e^{-i(\omega - \hat{\theta}) + i \frac{\pi}{2L} x^-} = 0, \quad (8)$$

where the  $Q$  is the charge operator and the operator  $e^{i\omega}$  is defined by [6]

$$e^{i\omega} \psi(x) e^{-i\omega} = e^{i \frac{\pi}{L} x^-} \psi(x), \quad (9)$$

so that [6]

$$[\omega, Q]_{x^+=0} = i, \quad e^{i\omega} Q e^{-i\omega} = Q - 1, \quad (10)$$

the  $\hat{\theta}$  is related to the fermion condensate parameter and the  $C$  is the Euler constant.

This form of the constraint allows to find the  $\psi_-$  in terms of  $\psi_+$  and get the correct nonzero value of the fermion condensate parameter in the LF vacuum state (with  $P_- = 0$ ) [6].

For the QCD(3+1) on the LF one has also the corresponding component of Dirac equation as canonical constraint. If one takes also the DLCQ formulation with antiperiodic in  $x^-$  fermion fields and reduce transverse coordinates to sites of a finite lattice, one can try to get the nonzero fermion condensate in the LF vacuum by the analogous modification of that constraint [10].

However, for the transverse components of the gluon field in QCD, we have no such direct guideline from the QED(1+1). A semiphenomenological way to introduce vacuum dynamics and nonzero condensate for gluons was proposed earlier in [8, 9], via the limiting transition to the LF Hamiltonian, starting from Hamiltonians, obtained by the quantization on space-like hyperplanes, close to the LF, in the so called “near light front” (nLF) coordinates  $\tilde{x}^{mu}$ :

$$\tilde{x}^+ = x^+ + \frac{\eta^2}{2}x^-, \quad \tilde{x}^- = x^-, \quad \tilde{x}^\perp = x^\perp, \quad (11)$$

where  $x^\pm = (x^0 \pm x^3)/\sqrt{2}$ , the  $\tilde{x}^+$  plays the role of the time, and  $\tilde{x}^+ = 0$  defines the quantization hyperplane. The LF coordinates are obtained from the nLF coordinates in the limit  $\eta \rightarrow 0$ . The idea was to “freeze” the limiting transition for some “zero” modes which can be related with vacuum effects (or with the nLF “infrared” dynamics). In usual consideration of this limiting transition that vacuum dynamics disappears.

## 2. The formulation of QCD on the light front

To develop the proposed formulation for the QCD(3+1) let us introduce nLF coordinates and take gluon fields periodic in  $\tilde{x}^-$  on the interval  $|\tilde{x}^-| \leq L$ . Also we can introduce the lattice in transverse part of nLF coordinates.

To maintain the gauge invariance on the lattice the transverse components of the gluon field will be related to lattice links and described by  $N \times N$  complex matrices  $M_k^{i,j}(x)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ;  $k = 1, 2$ ) for links, directed from the point  $x^\perp - ae_k^\perp$  to the point  $x^\perp$  ( $a$  is lattice spacing parameter,  $e_k^\perp$  is unit transverse vector directed along the  $k$ -axis in the transverse plane) [11, 12].

The other components of the gluon field in the nLF coordinates, i.e. the  $\tilde{A}_\pm^{ij}$ , are related to the sites of the lattice like fermion fields. We propose the condition  $\tilde{A}_-^{ij} = 0$  in analogy with the usual LF gauge.

Under the gauge transformations, described by unitary  $N \times N$  matrices  $\Omega(x^\perp)$ , the  $M_k(x)$  transform to the  $\Omega(x^\perp)M_k(x)\Omega^\dagger(x^\perp - ae_k^\perp)$ .

We introduce the analog of the field strength tensor  $\tilde{F}_{\mu\nu}$  described by the  $N \times N$  matrix:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{+-}(x) &= -\tilde{\partial}_- \tilde{A}_+(x), \\ G_{\pm k}(x) &= \frac{1}{ga} [\tilde{\partial}_\pm M_k(x) - ig(\tilde{A}_\pm(x)M_k(x) - M_k(x)\tilde{A}_\pm(x - ae_k))], \\ G_{12}(x) &= -\frac{1}{ga^2} [M_1(x)M_2(x - ae_1) - M_2(x)M_1(x - ae_2)].\end{aligned}\quad (12)$$

The gluon part of the action in nLF coordinates is taken to be as follows:

$$\begin{aligned}S(\eta) &= a^2 \sum_{x^\perp} \int dx^+ \int_{-L}^L dx^- \text{tr} [(\tilde{F}_{+-}(x))^2 + \eta^2 G_{+k}^+(x)G_{+k}(x) + \\ &+ G_{-k}^+(x)G_{+k}(x) + G_{+k}^+(x)G_{-k}(x) - G_{12}^+(x)G_{12}(x) - \\ &- \frac{\mu^2(a)}{4g^2 a^2} (M_k^+(x)M_k(x) - I)^2].\end{aligned}\quad (13)$$

The parameter  $\mu(a)$  is to be taken so large in the limit  $a \rightarrow 0$  that the matrices  $M_k(x)$  could be considered as unitary in this limit, and one could relate our action with the more usual lattice action [13] and with the action in the continuum nLF coordinates.

It is not difficult now to find canonical variables and the Hamiltonian at  $\tilde{x}^+ = 0$ . For gluon field  $M_k^{ij}(x)$  we get the canonical momentum

$$\Pi_k^{ij}(x) = \frac{a}{g} \left( \eta^2 G_{+k}^{ij+}(x) + G_{-k}^{ij+}(x) \right)$$

The variation of the action w.r.t. Lagrange multipliers  $\tilde{A}_+^{ij}$  leads to the constraint:

$$\begin{aligned}2\tilde{\partial}_- \tilde{F}_{+-}^{ij}(x) &= \frac{ig}{a^2} \left( M_k^{il}(x)\Pi_k^{jl}(x) - \Pi_k^{li}(x + ae_k)M_k^{lj}(x + ae_k) - \right. \\ &\left. - \Pi_k^{il+}(x)M_k^{jl+}(x) + M_k^{li+}(x + ae_k)\Pi_k^{lj+}(x + ae_k) \right),\end{aligned}\quad (14)$$

where the contribution of fermion fields is not included for simplicity. “Zero” mode of this constraint is the generator of gauge transformations that do not depend on the  $\tilde{x}^-$ . In quantum formulation we will impose this part of the constraint as a condition on the physical subspace of quantum states. This condition will be fulfilled, if we construct physical states on the transverse lattice in terms of invariants under such gauge transformations.

The other part of the constraint (14) is to be resolved w.r.t.  $\tilde{F}_{+-}^{ij}$ , and the result must be substituted into the Hamiltonian. The gluon part of the Hamiltonian has the following form:

$$\begin{aligned}
H = a^2 \sum_{x^\perp} \int_{-L}^L dx^- & \left[ \text{tr} \tilde{F}_{+-}^2(x) + \right. \\
& + \frac{1}{a^2 \eta^2} \left( g \Pi_k^{ij}(x) - \frac{1}{g} \tilde{\partial}_- M_k^{ij+}(x) \right) \left( g \Pi_k^{ij+}(x) - \frac{1}{g} \tilde{\partial}_- M_k^{ij}(x) \right) + \\
& \left. + \text{tr} \left[ G_{12}^+(x) G_{12}(x) + \frac{\mu^2(a)}{4g^2 a^2} (M_k^+(x) M_k(x) - I)^2 \right] \right], \quad (15)
\end{aligned}$$

where one must substitute the expression for the  $\tilde{F}_{+-}^{ij}$ , found from the constraint.

The next step is to perform the limiting transition to the Hamiltonian on the LF using, as a way, the eigenvalue problem for the nLF Hamiltonian and the perturbation theory in small parameter  $\eta$  in the framework of this eigenvalue problem. To do this we notice that the Hamiltonian at fixed  $L$  can be decomposed in series in powers of  $\eta$  of the form

$$H = \frac{1}{\eta^2} H_0 + H_2 + O(\eta^2).$$

Then we write

$$(H - E)f = 0, \quad f = f_0 + \eta f_1 + \dots, \quad E = \frac{1}{\eta^2} E_0 + E_2 + O(\eta). \quad (16)$$

In order to get in the  $\eta \rightarrow 0$  limit finite eigenvalues of the Hamiltonian, describing bound states on the LF, one has to put  $E_0 = 0$ . This condition can be satisfied by choosing the states with the minimum of the operator  $H_0$  and by subtracting from it its minimal eigenvalue.

To “freeze” the dynamics of “zero” modes under the limiting transition let us separate in the action (13) in the term  $\eta^{-2} G_{+k}^+(x) G_{+k}(x)$  the contribution of zero modes of fields  $G_{+k}(x)$ ,  $G_{+k}^+(x)$ . Let us change the



parameter  $\eta$  in this contribution by finite parameter  $\eta_0$ , which will play the role of a “vacuum” parameter. At that in the expression for the Hamiltonian the contribution of zero modes of the fields  $\Pi_k, \Pi_k^+$  is changed, taking the following form:

$$\frac{g^2}{\eta_0^2 2L} \sum_{x^\perp} tr[\Pi_{0k}^{ij}(x)\Pi_{0k}^{ij+}(x)],$$

where the zero modes are defined by the formulae:  $\Pi_{0k}^{ij}(x) = \int_{-L}^L d\tilde{x}^- \Pi_k^{ij}(x)$ . Now this term should not be related to the  $H_0$ .

Let us solve further the lowest order equation

$$H_0 f_0 = 0,$$

that gives actually the form of states in the limit  $\eta \rightarrow 0$ , i.e. on the LF. With this aim let us introduce the following decomposition of fields in the creation and annihilation operators:

$$\begin{aligned} M_k^{ij}(x) &= M_{0k}^{ij}(x^\perp) + \frac{g}{2\sqrt{2}L} \sum_{n \neq 0} [(B_{nk}^{ij}(x^\perp) + B_{-n,k}^{ij+}(x^\perp)) + \\ &\quad + i(A_{nk}^{ij}(x^\perp) + A_{-n,k}^{ij+}(x^\perp))] |p_n|^{-1/2} e^{-ip_n \tilde{x}^-}, \\ \Pi_k^{ij}(x) &= \frac{1}{2L} \Pi_{0k}^{ij}(x^\perp) + \frac{-i}{2g\sqrt{2}L} \sum_{n \neq 0} [(B_{nk}^{ij}(x^\perp) - B_{-n,k}^{ij+}(x^\perp)) - \\ &\quad - i(A_{nk}^{ij}(x^\perp) - A_{-n,k}^{ij+}(x^\perp))] |p_n|^{1/2} e^{-ip_n \tilde{x}^-}. \end{aligned} \quad (17)$$

One can check that  $A_{nk}^{ij}, A_{nk}^{ij+}$ , and  $B_{nk}^{ij}, B_{nk}^{ij+}$  satisfy canonical commutation relations for annihilation and creation operators at fixed  $\tilde{x}^+$ . Substituting these decompositions into the  $H_0$  we obtain (up to a constant):

$$H_0 = 2 \sum_{x^\perp} \sum_{n \leq 0} \sum_{i,j} |p_n| \left( A_{nk}^{ij+} A_{nk}^{ij} + B_{nk}^{ij+} B_{nk}^{ij} \right). \quad (18)$$

Therefore the subspace of states  $f_0$  can be defined by the equalities

$$A_{nk}^{ij} f_0 = B_{nk}^{ij} f_0 = 0, \quad n < 0. \quad (19)$$

In the next order in  $\eta$  we get  $f_1 = 0$ .

Further we have

$$H_0 f_2 + H_2 f_0 = E_2 f_0.$$

The projection of this equality on the subspace  $\{f_0\}$ ,  $\mathcal{P}\{f\} \equiv \{f_0\}$ , gives, in fact, the form of the eigenvalue problem on the LF:

$$(\mathcal{P}H_2\mathcal{P} - E_2) f_0 = 0$$

with the LF Hamiltonian

$$P_+ = \mathcal{P}H_2\mathcal{P}.$$

Such a projection is similar to the VEV w.r.t. modes of fields with  $n < 0$ . So we obtain for the  $P_+$  the expression which depends, beside of gluon zero modes, only on the  $A_{nk}^{ij}, A_{nk}^{ij+}, B_{nk}^{ij}, B_{nk}^{ij+}$  with  $n > 0$ , which become creation and annihilation operators on the LF. This expression can be written as the  $H_2$ , where negative ( $n < 0$ ) modes of gluon field are put to be zero, plus the terms due to “normal contractions” of these modes under the evaluation of the abovementioned projection. Furthermore, we can write this expression also in “normally” ordered form w.r.t. the  $n > 0$  modes of gluon field, i.e. w.r.t. the annihilation and creation operators on the LF. The resulting expression can be written in the following form:

$$\begin{aligned} P_+ &= : H_2 : + \Delta P_+, \\ \Delta P_+ &= \sum_{x^\perp} \left\{ \frac{g^4 N}{4L^2 a^2} \left( \sum_{n>0} p_n^{-3} \right) \text{tr} (\Pi_{0k}^+(x^\perp) \Pi_{0k}(x^\perp)) + \right. \\ &\quad + \frac{N}{a^2} \left( \sum_{n>0} p_n^{-1} \right) \text{tr} (M_{0k}^+(x^\perp) M_{0k}(x^\perp)) + \\ &\quad + \frac{g^2 N}{8La^2} \sum_{m, n>0} \left( \frac{p_n}{p_m} + \frac{p_m}{p_n} \right) (p_{n+m}^{-2} + p_{n-m}^{-2}) \times \\ &\quad \left. \times \text{tr} (A_{nk}^+(x^\perp) A_{nk}(x^\perp) + B_{nk}^+(x^\perp) B_{nk}(x^\perp)) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

where the  $: H_2 :$  means the expression for the  $H_2$  (in the LF limit and at all negative modes of gluon field equal to zero) normally ordered w.r.t. nonzero modes; the singular terms in sums over  $n, m$  must be excluded. In the expression for the  $\Delta P_+$ , written above, we omitted the terms which have the form, proportional to

$$\sum_{x^\perp, k} \int_{-L}^L dx^- \text{tr} (M_k^+(x) M_k(x)), \quad (21)$$

because they add a constant from the point of view of the theory in the continuum when the  $M_k^+(x)M_k(x)$  must approach to the  $I$ . In our lattice formulation one can add such a term with arbitrary coefficient.

Let us define the vacuum state in this model as the state which corresponds to the minimum of the  $P_+$  on the subspace with minimal value of the  $P_-$ . The normally ordered expression for the  $P_+$  reduces on this subspace to the expression where the contribution of only zero modes remains. That reduced expression has the following form ( $\mathcal{P}_0$  is the projector onto the subspace with minimal  $P_-$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 P_+ \mathcal{P}_0 = & \sum_{x^\perp} \left\{ \sum_k \text{tr} \left[ C_0 \Pi_{0k}^+(x^\perp) \Pi_{0k}(x^\perp) + C M_{0k}^+(x^\perp) M_{0k}(x^\perp) + \right. \right. \\ & + \frac{2L}{g^2 a^2} (M_{01}(x) M_{02}(x - ae_1) - M_{02}(x) M_{01}(x - ae_2))^+ \times \\ & \times (M_{01}(x) M_{02}(x - ae_1) - M_{02}(x) M_{01}(x - ae_2)) + \\ & \left. \left. + \frac{\mu^2(a)L}{2g^2} (M_{0k}^+(x) M_{0k}(x) - I)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

where  $C_0$  is the parameter, connected with the  $\eta_0$ :

$$C_0 = \frac{g^2}{2L\eta_0^2} + \frac{g^4 N}{4L^2 a^2} \sum_{n>0} p_n^{-3}, \quad (23)$$

and the  $C$  is, in fact, arbitrary, because this term reduces to a constant in the limit of unitary matrices  $M_{0k}(x)$ .

The expression (22) can be considered as the Hamiltonian of (2+1)-dimensional gauge theory with the time variable  $x^+$  and with the lattice in  $(x^1, x^2)$ . It is not difficult to find the form of the action for this theory:

$$\begin{aligned} S_{2+1} = & \sum_{x^\perp} \int dx^+ \text{tr} \left[ g^2 a^2 C_0^{-1} G_{+k}^+(x^\perp, x^+) G_{+k}(x^\perp, x^+) - \right. \\ & - C M_{0k}^+(x^\perp, x^+) M_{0k}(x^\perp, x^+) - \frac{2L}{g^2 a^2} (M_{01}(x^\perp, x^+) M_{02}(x^\perp - ae_1, x^+) - \\ & - M_{02}(x^\perp, x^+) M_{01}(x^\perp - ae_2, x^+))^+ (M_{01}(x^\perp, x^+) M_{02}(x^\perp - ae_1, x^+) - \\ & \quad - M_{02}(x^\perp, x^+) M_{01}(x^\perp - ae_2, x^+)) - \\ & \left. - \frac{\mu^2(a)L}{2g^2} (M_{0k}^+(x^\perp, x^+) M_{0k}(x^\perp, x^+) - I)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

The use of complex matrices  $M_{0k}^+(x^\perp, x^+)$ , instead of unitary ones [13], here is not necessary, because only difficulties of the performing the limiting transition to the LF with unitary matrices [14] forced us to work with complex ones. Therefore we can try to construct the vacuum w.f. in our formulation using the solution of this problem in the formulation with unitary matrices  $M_{0k}^+(x^\perp, x^+)$ . Starting from the usual (Wilson lattice) formulation of this (2+1)-dimensional theory and following to Creutz procedure [15] we come to the following form of the Hamiltonian:

$$H = \sum_{x^\perp} \left[ \frac{1}{2} C_0 \hat{\Pi}_k^a(x) \hat{\Pi}_k^a(x) - \frac{4L}{g^2 a^2} \text{Re tr} U_{12}(x) \right], \quad (25)$$

where the  $\hat{\Pi}_k^a(x)$  are the analog of the momenta for link variables, and the  $U_{12}(x)$  are plaquette variables [15]. The operators  $\hat{\Pi}_k^a(x)$  satisfy the following commutation relations:

$$[\hat{\Pi}_k^a(x^\perp), \hat{\Pi}_{k'}^b(x^{\perp'})] = i f^{abc} \hat{\Pi}_k^c(x^\perp) \delta_{k, k'} \delta_{x^\perp, x^{\perp'}}, \quad (26)$$

where  $f^{abc}$  are  $SU(N)$  structure constants.

The commutation relations for the  $\hat{\Pi}_k^a(x^\perp)$  and unitary matrices  $M_{0k}(x^\perp)$  are the following:

$$[\hat{\Pi}_k^a(x^\perp), M_{0k'}(x^{\perp'})] = -\frac{\lambda^a}{2} M_{0k}(x^\perp) \delta_{k, k'} \delta_{x^\perp, x^{\perp'}}, \quad (27)$$

where the  $\frac{\lambda^a}{2}$  are generators of fundamental representation of  $SU(N)$ :

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}. \quad (28)$$

Plaquette variable  $U_{12}(x^\perp)$  is defined by the formulae:

$$U_{12}(x^\perp) = M_{01}(x^\perp) M_{02}(x^\perp - ae_1) M_{01}^+(x^\perp - ae_2) M_{02}^+(x^\perp).$$

Then the vacuum w.f. of our formulation can be approximated at very large  $\mu^2$  by the following expression:

$$\begin{aligned} & \Psi_v[M_{0k}^+, M_{0k}] = \\ & = \exp \left\{ -\alpha(\mu) \sum_{x^\perp} \text{tr} [(M_{0k}^+(x^\perp) M_{0k}(x^\perp) - I)^2] \right\} \tilde{\Psi}_v[M_{0k}^+, M_{0k}], \end{aligned} \quad (29)$$

where  $\alpha(\mu) \gg 1$  in the limit of very large  $\mu^2$  and the  $\tilde{\Psi}_v[M_{0k}^+, M_{0k}]$  is the solution for the vacuum w.f. in the formulation with unitary matrices  $M_{0k}$ .

## References

- [1] P. A. M. Dirac. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [2] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov. *Lett. Math. Phys.* **5**, 239 (1981).
- [3] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov. *Lett. Math. Phys.* **5**, 437 (1981).
- [4] M. Burkardt, A. Langnau. *Phys. Rev. D* **44**, 1187, 3857 (1991).
- [5] S. A. Paston, V. A. Franke. *Theor. Math. Phys.* **112**, 1117 (1997); hep-th/9901110.
- [6] S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke. *Theor. Math. Phys.* **131**(1), 516 (2002); hep-th/0302016.
- [7] S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke. *On the construction of corrected light-front Hamiltonian for QED<sub>2</sub>*, hep-th/0011224.
- [8] E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke. *Sov. J. Nucl. Phys.* **47**(3), 559 (1988).
- [9] E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke. *Sov. J. Nucl. Phys.* **49**(4), 688 (1989).
- [10] V. A. Franke, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov. hep-th/0610160.
- [11] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov. *Quantization of field theory on the light front*, hep-th/0404031.
- [12] S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke. *Theor. Math. Phys.* **139**(3), 807 (2004); hep-th/0303180.
- [13] K. G. Wilson *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [14] D. Grunewald, E. M. Ilgenfritz, E. V. Prokhvatilov, H. J. Pirner. hep-th/0711.0620.
- [15] M. Creutz. *Phys. Rev. D* **15**, 1128 (1977).

# Когерентность поля, возникающего при одноквантовой аннигиляции монохроматического пучка позитрониев в поле плоской электромагнитной волны

В. С. Старостин\*

*Кафедра Математики, Военный Инженерный Технический Университет (ВИТУ)*

В работе получены выражения для квантовомеханических степеней когерентности всех порядков поля  $\gamma$ -квантов, возникающего при одноквантовой аннигиляции монохроматического пучка позитрониев в поле плоской электромагнитной волны. Показано, что они совпадают с степенями когерентности одномодового поля с числом заполнения, равным числу позитрониев в пучке.

## 1. Введение

В работе рассматривается поле аннигиляционных  $\gamma$ -квантов, возникающее при одноквантовой аннигиляции ультрарелятивистского парапозитрония (PS) с гамма-фактором  $\gamma = 10^5$  в поле плоской монохроматической электромагнитной волны

$$A_\mu = a_\mu \cos kx, \quad ak = 0, \quad (1)$$

где  $k_\mu$  волновой вектор. Пусть пучок позитрониев состоит из  $N$  атомов, каждый из которых обладает одним и тем же импульсом  $p$  (монохроматический пучок) и движется навстречу волне.

Как известно, вероятности процессов в этом случае зависят от двух инвариантных параметров:  $\xi = e \frac{\sqrt{-a^2}}{M_0}$  и  $\chi = \frac{2kp}{M_0}$ , где  $p$  импульс позитрония,  $M_0$  его масса в вакууме,  $e$  заряд электрона. Будем считать,

---

\*E-mail: star\_vs@pochta.ru

что параметры внешнего поля (1) и  $p$  таковы, что  $\xi \approx 0,04$ , а  $\chi \approx 1$ . В лабораторной системе (л.с.) это соответствует напряженности внешнего поля  $E \approx E_{at}/\gamma$  и частоте  $k_0 \approx M_0/2\gamma \approx m_0/\gamma$  ( $m_0$  - масса электрона). При таких параметрах, как было показано в работе [1], в динамике системы будут доминировать переходы  $|p\rangle \rightleftharpoons |q\rangle + |k\rangle$ . Здесь  $q$  импульс аннигиляционного  $\gamma$ -кванта. В этом случае время жизни позитрония относительно одноквантовой аннигиляции составляет  $\tau \approx 10^{-15}$  сек. [1, 2]. При этом стационарными состояниями системы будут когерентные смеси  $c_1|p\rangle + c_2|q\rangle$  [2], так называемые светопозитронии (LPS).

Если время включения внешнего поля много меньше  $\tau$  и длительности импульса, то, как показано в работе [3], вероятность  $w = |c_2|^2$  обнаружения аннигиляционного  $\gamma$ -кванта в LPS равна

$$w = \frac{|\nu|^2}{((\chi - 1)/2)^2 + |\nu|^2} \sin^2 \left( kx \frac{\sqrt{((\chi - 1)/2)^2 + |\nu|^2}}{\chi} \right), \quad (2)$$

где  $\nu = 1/M\tau \ll 1$ ,  $M \approx M_0(1 + \xi^2)$ . Заметим, что в работе используется естественная система единиц:  $h/2\pi = c = 1$ .

## 2. Когерентность аннигиляционного поля

Рассмотрим квантовомеханические степени когерентности электромагнитного поля [4]:

$$g_n = \frac{\langle E^-(1) \dots E^-(n) E^+(n) \dots E^+(1) \rangle}{\langle E^-(1) E^+(1) \rangle \dots \langle E^-(n) E^+(n) \rangle},$$

где  $E^\pm(i)$  положительно/отрицательно частотные части операторов напряженности электромагнитного поля в мировой точке  $(t_i, \vec{r}_i)$ . Угловые скобки означают усреднение при помощи матрицы плотности  $\rho$  электромагнитного поля.

Так как пучок позитрониев монохроматический, то и аннигиляционное поле будет монохроматическим (одномодовым).

В этом случае нетрудно показать, что

$$g_n = \frac{\langle (a^+)^n (a^-)^n \rangle}{\langle a^+ a^- \rangle^n},$$

где  $a^\pm$  операторы рождения/уничтожения фотонов данной моды.

Так как для одномодового поля

$$\rho = \sum_{m,m'} \rho_{m,m'} |m\rangle \langle m'|,$$

где  $|m\rangle$  состояние, содержащее  $m$  квантов данной моды, а операторы  $(a^+)^n (a^-)^n$  диагональны в представлении чисел заполнения, то

$$g_n = \frac{\sum_m \rho_m m(m-1) \cdots (m-n+1)}{(\sum_m \rho_m m)^n}, \quad (3)$$

где  $\rho_m \equiv \rho_{mm}$  вероятность обнаружения  $m$  фотонов в моде. Таким образом для нахождения  $g_n$  необходимо вычислить факториальные моменты распределения  $\rho_m$ .

Оценим сначала  $\rho_m$ . Пусть пучок позитрониев, содержащий  $N = 10^{12}$  частиц, имеет длину  $1\text{см}$  в л.с. и поперечное сечение  $1\text{мк}^2$ . Тогда плотность пучка  $n_{PS}$  будет равна  $10^{21}\text{см}^{-3}$ . Вряд ли в ближайшие годы удастся получить более плотный пучок. Плотность "квантов"  $n_\gamma$  внешнего классического поля (1) оценивается как  $10^{33} (k_0/m_0) \xi^2 \text{см}^{-3}$ . При  $\xi \approx 0,04$  и  $m_0/k_0 \approx \gamma = 10^5$   $n_\gamma \approx 1,6 \cdot 10^{25} \text{см}^{-3}$ . Так как  $n_\gamma \gg n_{PS}$ , то влиянием процессов распада позитрония на внешнее поле можно пренебречь. А так как среднее расстояние  $(n_{PS})^{-1/3} \approx 10^{-7}\text{см}$  между атомами PS в пучке много больше размеров атома, то каждый из них эволюционирует независимо друг от друга. Следовательно, если вероятность обнаружения аннигиляционного  $\gamma$ -кванта в LPS равна  $w$  (2), то вероятность обнаружения  $m$  квантов при эволюции  $N$  атомов можно вычислить по формуле Бернулли:

$$\rho_m = C_N^m w^m (1-w)^{N-m}. \quad (4)$$

Факториальные моменты  $\sum_m \rho_m m(m-1) \cdots (m-n+1)$  распределения Бернулли легко найти, используя производящую функцию  $(w_1 + w_2)^N$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N C_N^m w^m (1-w)^{N-m} m(m-1) \cdots (m-n+1) = \\ = \begin{cases} w^n N(N-1) \cdots (N-n+1) & \text{при } m \leq N \\ 0 & \text{при } m > N. \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$



Подставляя (5) в формулу 3, получаем, что

$$g_n = \begin{cases} \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} & \text{при } m \leq N \\ 0 & \text{при } m > N. \end{cases} \quad (6)$$

### 3. Заключение

Таким образом мы показали, что при принятых нами параметрах внешнего поля и пучка свойства когерентности поля аннигиляционных  $\gamma$ -квантов совпадают со свойствами одномодового поля с фиксированным числом заполнения, равным числу позитрониев в пучке.

То, что аннигиляционное поле будет одномодовым, следует из монохроматичности пучка аннигилирующих позитрониев.

Вероятности  $w$  (2) обнаружения аннигиляционного  $\gamma$ -кванта в атоме LPS осциллируют, составляя в среднем

$$\bar{w} = \frac{|\nu|^2/2}{((\chi-1)/2)^2 + |\nu|^2}.$$

При "резонансе" ( $\chi = 1$ )  $\bar{w} = \bar{w}_0 = \frac{1}{2}$ . Следовательно, среднее число аннигиляционных  $\gamma$ -квантов в моде равно  $N\bar{w}$  (или  $N/2$  при резонансе). То, что в формуле (6) фигурирует число  $N$  позитрониев в пучке, а не  $N\bar{w}$  (или  $N/2$  при резонансе), говорит о том, что интерферируют не "средние значения", а фотонные компоненты каждого из атомов светопозитрония.

В стандартных курсах теории вероятностей можно найти следующую оценку:

$$1 \geq \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} \geq 1 - \frac{n(n-1)}{2N}.$$

Это означает, что при  $n \ll \sqrt{N}$   $g_n \approx 1$ , то есть порядок  $n_0$  когерентности аннигиляционного поля удовлетворяет неравенству  $1 \ll n_0 \ll \sqrt{N}$ , так как  $\sqrt{N} = 10^6$ .

Используя формулу Стирлинга и формулу удвоения для гамма функций, нетрудно показать, что

$$g_{N/2} \approx (2/e)^{-N/2} \sqrt{N/2}, \quad g_N \approx e^{-N} \sqrt{N/2}.$$

Более точные оценки номера, начиная с которого  $g_n$  экспоненциально убывает, не имеет смысла искать, так как в обозримом будущем диапазон  $1 \ll n_0 \ll 10^6$  вряд ли будет исчерпан в эксперименте.

**Благодарности.** В заключении автор выражают глубокую и искреннюю признательность профессору, д.ф.-м.н. А. А. Грибу за постановку задачи и полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] В. С. Старостин, И. К. Лицкевич, *Теория возмущений для уравнения Бете-Солпитера в поле плоской электромагнитной волны*, Ядерная Физика **51**, No. 1(3), (1990).
- [2] В. С. Старостин, И. К. Лицкевич, *К вопросу об одноквантовой аннигиляции позитрония в поле интенсивного лазерного луча*, Тезисы международной конференции “Оптика лазеров” Т.II, с. 664 (1993).
- [3] В. С. Старостин, в кн. Гравитация, космология и элементарные частицы, Санкт-Петербург, изд-во СПбГУЭФ, 2004, с. 122.
- [4] Р. Лоудон. *Квантовая теория света*. М.: Мир, 1976.

# Оптимизированное условие квазиклассического квантования

Н. Н. Трунов\*

*ВНИИМ метрологии им. Д. И. Менделеева,  
СПб, 198005 Московский пр., 19*

На основе точного суммирования ряда ВКБ для определения спектра предложена практически удобная форма условия квантования, приводящая к точному результату для расширенного класса модельных потенциалов. Продемонстрирована эффективность условия за пределами этого класса, в том числе для состоятельной оценки точности ВКБ.

## 1. Введение

Квазиклассические методы расчета спектров [1], в силу их простоты, наглядности и конструктивности продолжают интенсивно развиваться, см. [2-6] и ссылки там. Фактически квазиклассическими являются все методы, в которых спектр выражается как функционал от потенциала (и, возможно, его производных конечного порядка) независимо от формы этого функционала.

В [6] предложено модифицированное условие квантования, расширяющее класс потенциалов, для которых оно точно, до класса потенциалов, к которым применимы методы факторизации или суперсимметрии. Указанный класс охватывает все часто используемые модельные потенциалы.

Следует ожидать поэтому, что на основе нового условия можно эффективно строить приближения для реальных потенциалов, близких к указанным.

В [6] для введения поправок к стандартному ВКБ и суммирования ряда для определения спектра была введена квантовая поправка к исходному потенциалу. Такая трактовка поправок интересна сама по себе [7] и вполне допускает дальнейшее развитие, но может оказаться недостаточно конструктивной для практического применения.

---

\*E-mail: trunov@vniim.ru

В данной работе предложено эквивалентное, но более простое и конструктивное условие, в котором отклонение от стандартного ВКБ сконцентрировано в дополнительном сдвиге фазы – функционале от потенциала – по сравнению со стандартным  $n + 1/2$ , где  $n$  – квантовое число. При этом квазиклассика развивается "изнутри", т.е. не используются посторонние ей соображения и подходы.

В качестве оптимизированного условия квантования предлагается

$$\int \sqrt{2(E - V)} dx = \pi \hbar (n + 1/2) + \Delta(E), \quad (1)$$

$$\Delta(E) = \frac{2\Delta_1(E)}{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\pi^2 \hbar^2} \Delta_1^2(E)}}; \quad \Delta_1(E) = \frac{\hbar^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \int \frac{dx \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{2(E - V)}}.$$

Интегралы без указания пределов берутся между точками поворота, масса  $m = 1$ . Условие (1) обладает следующими свойствами, изученными ниже

1. Оно точно в широком классе потенциалов Alg

$$V = A^2 s^2 + Bs + C \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{ds}{dx} = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 > 0, \quad (3)$$

(где  $s$  – вспомогательная функция) при всех значениях параметров. При этом  $\Delta_1$  не зависит от  $E$ :

$$\Delta_1 = \hbar^2 \frac{\pi a_2}{8\sqrt{2}A}. \quad (4)$$

2. В пределе  $\Delta_1 \rightarrow \infty$ , или  $A \rightarrow 0$ , когда

$$\Delta = \frac{\pi \hbar}{2} \operatorname{sgn} \Delta_1, \quad (5)$$

условие (1) точно для некоторых типов потенциалов  $V \in \text{Alg}$ , и обладает малой погрешностью для других типов. Для случаев, когда известны уточнения стандартного ВКБ другими способами, условие (1), (5) не уступает в точности.

3. Для потенциалов  $V \in \text{Alg}$  и конечных  $\Delta_1$  отклонение  $\Delta$  (1) от истинного значения определяется "адиабатичностью", т.е. скоростью изменения  $\Delta_1$  с энергией. Эта скорость является мерой отклонения потенциала от класса Alg и обычно мала.

Условие (1) удобно использовать в форме

$$E(n) = \tilde{E}(n + \Delta(E)/\pi\hbar), \quad (6)$$

где  $E$  – точный спектр, а  $\tilde{E}$  – вычисленный в стандартном приближении ВКБ (т.е. с  $\Delta \equiv 0$ ).

## 2. Суммирование ряда для получения замкнутой формы $\Delta$

Ряд ВКБ для определения спектра [1] определяет  $\Delta$  как сумму ряда

$$\Delta = \sum_{n=1} \Delta_n, \quad \Delta_n(E) \sim \hbar^{2n}, \quad (7)$$

где каждая  $\Delta_n$  представляется в виде контурного интеграла, охватывающего точки поворота и включающего степени  $Q^2 = V - E$  и производных  $Q$ . Хотя фактически вычислено много членов ряда  $\Delta_n$ , это не дает еще возможности вычислить сумму. Поэтому для суммирования  $\Delta$  применим обходной путь.

*Утверждение 1. Все  $\Delta_n$  в классе  $V \in Alg$  не зависят от энергии.*

Предварительно заметим, что  $\hbar$  входит всегда в комбинации  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , так что член  $\Delta_n \sim \hbar^{2n}$  должен содержать и  $2n$  дифференцирований. В нашей системе с  $m = 1$  размерность  $\hbar\nabla \sim \sqrt{\hbar^2/md^2} \sim \sqrt{E}$ . Далее, размерность подынтегрального выражения в любом  $\Delta_n$  должна быть та же, что в стандартном фазовом интеграле (1), т.е.  $\sqrt{E}$ .

Наконец, заметим, что при сведении контурного интеграла к интегралу по вещественной оси выполняется регуляризация введением безразмерного множителя  $(\partial^k/\partial E^k)(E - V)^k$  с таким значением  $k$ , чтобы обеспечить сходимость – для этого в знаменателе удерживается  $(E - V)^{1/2}$ , см. (1) – все возникающие степени полуцелые. В итоге  $\Delta_n$  составится из суммы членов с разными  $a$  такими, что  $2n/a$  – целое:

$$\frac{\partial^k}{\partial E^k} \int \frac{[(\hbar\nabla)^a V]^{2n/a}}{(E - V)^{1/2}} \sim \int [E]^{1/2} dx, \quad (8)$$

где указана требуемая размерность. Отсюда получим условие на  $k$ :

$$\left(\frac{a}{2} + 1\right) \frac{2n}{a} - k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

В промежуточных вычислениях удобно сдвинуть  $s$  и начало отсчета  $V$  так, чтобы в (2) было  $B = C = 0$ ; при этом  $a_2$  не изменится. Учитывая, что  $(d/dx) = \sigma(d/ds)$  и  $dx = ds/\sigma$ , по (1) получим

$$\Delta_1 = \frac{\hbar^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \int \frac{\sigma s^2 ds}{\sqrt{E - A^2 s^2}} = \frac{\pi a_2 \hbar^2}{8\sqrt{2}A}, \quad (10)$$

так что только старший член  $a_2 s^2$  дает после дифференцирования по  $E$  вклад в  $\Delta_2$ ; здесь, очевидно,  $k = 2$ ,  $a = 1$ . Аналогично, при учете (10), старшие по степени  $s$  члены в  $\Delta_n$  содержат  $(\partial^k/\partial E^k) E^k = const$ , все младшие – аннулируются. В итоге

$$\Delta_n = const_n \hbar \left( \frac{\hbar a_2}{A} \right)^{2n-1}. \quad (11)$$

Таким образом, все  $\Delta_n$  не зависят от  $E$ .

*Утверждение 2.* В классе Alg функция  $\Delta(E)$  может быть представлена как разность

$$\Phi(\alpha) = \int \frac{ds}{\sigma} \sqrt{2 \left[ E - A^2 s^2 + \frac{\alpha f(\alpha) \sigma a_2}{8} \right]}, \quad \alpha = \hbar^2 \quad (12)$$

и  $\Phi(0)$  при некоторой разлагаемой в ряд Тейлора функции  $f(\alpha)$  такой, что  $f(0) = 1$ .

Учтем, что

$$\int \frac{ds}{\sqrt{B + Cs - D^2 s^2}} = \frac{\pi}{D}$$

при всех значениях  $B$ ,  $C$ , обеспечивающих вещественные точки поворота. Дифференцируя  $\Phi(\alpha)$ , подставляя  $\sigma$  (3) и вынося  $A^2 - \alpha f(\alpha) a_2^2/8$  из-под знака интеграла, получим

$$\frac{\pi}{8\sqrt{2}} \frac{a_2 (f(\alpha) + \alpha f'(\alpha))}{\sqrt{A^2 - \alpha f(\alpha) a_2^2/8}} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{\pi a_2}{8\sqrt{2}A} + C\alpha + \dots, \quad (13)$$

где справа мы подставили  $\partial \Delta/\partial \alpha$  с  $\Delta_1$  из (10). Очевидно при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $f(\alpha) \rightarrow 1$ , левая и правая стороны (13) действительно совпадают. При малых  $\alpha \neq 0$  разложение левой стороны в ряд по степеням  $\alpha$  доставляет коэффициенты ряда Тейлора для  $f$ .

*Утверждение 3.* Функция  $f(\alpha) \equiv 1$ . Достаточно указать один пример

в классе Alg, где точный спектр обеспечивается поправкой с  $\hbar^2$ . Например, это известная замена  $l(l+1) \rightarrow (l+1/2)^2$  в кулоновском потенциале с учетом центробежного (см. ниже).

*Утверждение 4.* В классе Alg сумма ряда  $\Delta$  дается формулой (1). Интегрированием (13) по  $\alpha$  с учетом  $\Delta(\alpha=0) = 0$  получаем

$$\Delta = \frac{2\pi A}{a_2\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{a_2^2 \hbar^2}{8A^2}} - 1 \right]. \quad (14)$$

Умножая числитель и знаменатель на  $(1+\sqrt{\quad})$  и учтя  $\Delta_1$  из (10), приходим к окончательной форме  $\Delta$  (1).

### 3. Применение оптимизированного условия

Для потенциала

$$V = A^2 s^2, \quad s = th x, \quad \sigma = 1 - s^2 \quad (15)$$

вычисление спектра по (1) приводит к точному результату, причем  $\Delta$  получим из (1), (10) при  $a_2 = -1$ ; в пределе  $A \rightarrow 0$  имеем  $\Delta = -\hbar\pi/2$ , так что правая часть (1) обращается в нуль для нижнего уровня  $n = 0$ . Это соответствует физической ситуации: в потенциалах с одинаковыми асимптотическими значениями  $V(+\infty) = V(-\infty)$  нижний уровень существует всегда, даже при  $A \rightarrow 0$ , когда и  $E \rightarrow 0$ . Соответственно левая часть (1) также имеет пределом нуль. Отметим, что только суммирование всего ряда ВКБ по степеням  $\hbar^2$  позволило получить сумму, линейную по  $\hbar$ . То же предельное значение  $\Delta$  должно, очевидно, выполняться для всех потенциалов с указанными асимптотиками, независимо от их принадлежности к классу Alg (2,3).

При  $a_2 > 0$  имеем дополнительный набег фазы, т.е.  $\Delta > 0$ , подъем всех уровней; в пределе  $A \rightarrow 0$  получим  $\Delta = \pi/2$ , т.е. сдвиг  $n + 1/2 \rightarrow n + 1$ . Этот случай рассмотрим на примере важного класса SC экранированных кулоновских потенциалов

$$W = -\frac{Z\chi(x)}{x}; \quad \chi(0) = 1, \quad \chi' < 0.$$

Такие потенциалы монотонны, поэтому для образования минимума введем вспомогательное слагаемое  $A^2 W^2$ . Для потенциала Хюльгена

$W \in Alg$ ,

$$\begin{aligned} W &= (e^x - 1)^{-1} = \frac{1}{2} - s; & s &= -\frac{1}{2}cth\frac{x}{2}, & \sigma &= s^2 - \frac{1}{4} > 0 \\ V &= A^2W^2 + W; \end{aligned} \quad (16)$$

при сдвиге начала отсчета  $s$  для устранения члена  $Bs$  в  $V$  коэффициенты  $A^2$  и  $a_2 = 1$  не изменятся. Устремляя  $A \rightarrow 0$ , получим для  $W$  значение  $\Delta = \hbar\pi/2$ , что согласно (2) дает точный спектр. Для других  $V \in SC$ , но  $V \notin Alg$ , форма  $\sigma$  будет отлична от квадратичной, если по-прежнему примем (2). Однако, как видно из (16), при введении  $A^2W^2$  и устремлении  $A \rightarrow 0$  также получим  $\Delta_1 \rightarrow \infty$ . Поэтому можно ожидать, что и при  $a_2 > 0$  предельное значение  $\Delta = \pi\hbar/2$ , характерное для всех потенциалов  $V \in Alg$ , будет хорошим приближением. (Напомним, что при  $a_2 < 0$  и  $A \rightarrow 0$  предельное значение  $\Delta = -\pi/2$  вообще определяется типом асимптотики  $V$ , а не принадлежностью  $Alg$ ).

Потенциал Юкавы  $W = -Ze^{-x}/x$  и потенциал Хюльтена тем менее отличаются друг от друга, чем менее размер классически доступной области, т.е. чем глубже лежит энергетический уровень. Поэтому следует ожидать и сближения значений  $\Delta$  по мере уменьшения энергии. (Это очевидно для  $\Delta_1$ , но точная связь  $\Delta$  и  $\Delta_1$  не обязана выполняться при  $V \notin Alg$ ). Наибольшую разницу  $\Delta$  следует ожидать при  $E = 0$ , т.е. появлении нового уровня; она может служить оценкой отклонения данного потенциала от потенциалов  $V$  с теми же асимптотиками, но  $V \in Alg$ . Естественной мерой служит наибольший при данном  $E$  сдвиг номера уровня, для  $V \in Alg$  равный  $1/2$

$$\delta = \frac{\Delta[V]}{\pi\hbar} - \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Используя численные данные, приведенные, например, в [2, 9.6], получим для потенциала Юкавы при  $E = 0$  весьма малые значения  $\delta = 0.034; 0.027; 0.022$  соответственно при  $n = 0, 1, 2$ . Из малости  $\delta(E = 0)$  и обсужденного стремления его к нулю при уменьшении  $E$  следует, что (1) при  $\Delta = \pi\hbar/2$  будет хорошим приближением для всех связанных состояний потенциала Юкавы.

Выше член  $A^2W^2$  носил формальный характер; однако для собственно кулоновского потенциала он приобретает смысл центробежного при  $A^2 = \hbar^2l(l+1)/2$ :

$$V = A^2s^2 + Zs, \quad s = -\frac{1}{x}, \quad \sigma = s^2 \quad (18)$$



с последующим сдвигом  $s$  для устранения линейного по  $s$  члена. Вычисляя  $\Delta$  – удобнее форма (14), получим ( $a_2 = 1$ )

$$\Delta = \pi\hbar \left[ l + \frac{1}{2} - \sqrt{l(l+1)} \right], \quad (19)$$

что дает по (1) точный спектр. Зависимость самого коэффициента  $A$  от  $\hbar$  не имеет значения, так как все используемые в классе Alg окончательные соотношения – точные (не используют малость  $\hbar^2$ ). Предельное значение  $\Delta = \pi\hbar/2$  при  $l = 0$  можно получить как из (19), так и прежним способом  $A \rightarrow 0$  без вычислений.

#### 4. Точность спектра

*Утверждение 5. Известные оценки точности ВКБ, использующие скорость изменения длины волны де Бройля  $\lambda$ , несостоятельны при определении спектра. Вместо них должны использоваться интегральные оценки погрешности, например*

$$a) \delta_n = \frac{\delta}{n + \frac{1}{2}} \quad б) \delta_n = \frac{\Delta}{\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right)} \quad (20)$$

с  $\delta$  из (17) для оптимизированного (а) и стандартного (б) условий квантования.

Для потенциала Юкавы при  $n = 0, 1, 2$  согласно (21а) имеем  $\delta_n = 0.068; 0.018; 0.009$ .

Действительно, даже для точнорешаемых стандартным условием задач  $d\lambda/dx \neq 0$ . Более того, для  $V \in Alg$  мы можем даже формально неограниченно увеличивать  $\hbar$ , а с ней – дифференциальную погрешность, так все соотношения в Alg выполняются при всех значениях входящих параметров.

Причина бессодержательности оценок – полная компенсация локальных ошибок при интегральном подходе к вычислению спектра.

Наглядно это видно, например, из того, что проведенное в [2, 9.6] уточнение ВКБ волновых функций сопряжением их с точными асимптотиками приводит к значениям  $\Delta$  типа  $\pi\hbar/2$  или (19), характерным для  $V \in Alg$  – и потому не зависящим от энергии. Не улавливается при этом различие с  $V \notin Alg$ , где  $\Delta$  отлична от данной, неясна точность и т.д.

С иной точки зрения можно сказать, что волновая функция вычисляется для конкретного уравнения, а спектр – для класса эквивалентности уравнений, получаемых допустимыми преобразованиями функции и переменных. Эта дополнительная симметрия и приводит в конечном счете к большей точности спектров по сравнению с волновой ВКБ функцией.

При расчете спектров для потенциалов с параболическим минимумом полезно выражение

$$\Delta_1 = \frac{\pi \hbar^2}{64} \left\{ \frac{V^{(4)}}{[V^{(2)}]^{3/2}} - \frac{7}{9} \frac{[V^{(3)}]^2}{[V^{(2)}]^{5/2}} \right\}, \quad (21)$$

где все производные  $V^{(n)}$  берутся в точке минимума. В классе  $V \in Alg$  это выражение точно; для других потенциалов оно асимптотически верно в окрестности минимума, т.е. там, где поправки наиболее существенны – при  $n = 0, 1$ . В (21) масштабирование  $V \rightarrow A^2 V$  так же выявляет  $\Delta_1 \sim A^{-1}$ , как и в (10).

Как правило,  $|\Delta_1(E)|$  будет убывать для  $V \in Alg$  с ростом  $E$ . Например, при  $V = A^2 sh^2 x$  имеем  $\sigma = \sqrt{1 + s^2}$  и качественное поведение интеграла в (10)  $AE\sqrt{1 + c^2 E/A^2}$  с  $c \leq 1$ , что приводит к

$$\Delta_1(E) \sim \Delta_1(0) \frac{1 + Ec^2/2A^2}{(1 + c^2 E/A^2)^{5/2}}.$$

## 5. Обсуждение

Предложенные схемы с использованием для разных классов потенциалов  $\Delta_1$  в форме (5) или (21) во многих реальных задачах уже приведут к весьма точному спектру. Вместе с тем, возможны различные варианты применения и уточнения метода. Например, в интегралах типа (13) можно провести замену  $a_2 \sigma$  на  $\Delta_1 \sigma$  с нужным коэффициентом. Или же, подставляя в фазовый интеграл (12) значение  $a_2$ , соответствующее согласно (10) форме  $\Delta_1$  (21), получим после подстановки

$$As = \sqrt{V - V_{\min}} \operatorname{sgn} \frac{dV}{dx} \quad (22)$$

условие квантования в виде стандартного (т.е. без  $\Delta$  в правой части), но с поправками порядка  $\hbar^2$ , линейными по  $V$  и по радикалу  $\sqrt{V - V_{\min}}$ .

При специальном выборе коэффициентов в (2)  $A = 1$ ,  $B = \hbar/\sqrt{2}$ ,  $C = 0$  переменная  $s$  приобретает свойства суперпотенциала  $S$  [8], причем условие квантования приобретает одну из форм, полученных в [7]. Аналог (1) имеет вид

$$\int \sqrt{2(E - S^2)} dx = \pi \hbar n + D \tag{23}$$

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n, \quad D_1 = \frac{\hbar^2 E}{6\sqrt{2}} \frac{d^2}{dE^2} \int \frac{\sigma(S) dS}{\sqrt{E - S^2}}$$

Все  $D_n \sim \hbar^{2n}$  обращаются в нуль при  $E = 0$ , так что условие (24) точно при  $n = 0$  для всех потенциалов, когда  $E = 0$  [8]. В отличие от  $\Delta_1$ , функция  $D_1 \equiv 0$  для всех  $V \in Alg$ ; то же верно для всех  $D_n$ , так что (23) при  $D = 0$  точно в классе Alg. На основе (23) может быть так же развита техника уточнений, хотя не всегда естественен и удобен выбор коэффициентов в  $S$ , т.е. связь  $S$  и  $V$ .

Весьма перспективным представляется переход от  $V$  к монотонной переменной  $s$  (22) и сосредоточение всей информации о потенциале в функции  $\sigma(s) = ds/dx$ . Для  $V \in Alg$  функция  $\sigma$  является полиномом второго порядка, а для близких к классу Alg потенциалов может быть аппроксимирована аппроксимантами Паде (по значениям при  $s \rightarrow 0$  и  $|s| \rightarrow |s_{\max}|$ ), которые обычно в разных задачах дают точность выше ожидаемой [9]. Например, параметр  $\beta$  описывает асимметричные искажения потенциальной ямы (16) при сохранении её глубины

$$\sigma = \frac{1 - s^2}{1 + \beta s}, \quad |\beta| < 1. \tag{24}$$

Легко видеть, что фазовый интеграл  $\Phi(0)$  из (12) стандартного приближения не зависит от  $\beta$  вообще. То же справедливо при замене  $1 + \beta s$  на  $1 + f(s)$  с любой нечетной функцией  $s$ . Таким образом, автоматически конструируются семейства потенциалов с совпадающими в основном приближении спектрами, изученные в [3]. Заметим, что фактически все потенциалы кроме кулоновского – модельные, и представление их в виде  $\sigma(s)$  вместо  $V(x)$  – вопрос смены традиции.

## Список литературы

- [1] С. Ю. Славянов. *Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера*. Л.: изд-во ЛГУ, 1990.

- [2] В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. *Задачи по квантовой механике.*, часть 1. М.: УРСС, 2001.
- [3] А. А. Лобашев, Н. Н. Трунов. *ТМФ* **120**, 99 (1999).
- [4] А. А. Лобашев, Н. Н. Трунов. *ТМФ* **124**, 463 (2000).
- [5] К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов. *ТМФ* **135**, 82 (2003).
- [6] Н. Н. Трунов. *ТМФ* **138**, 480 (2004).
- [7] К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов. *Квантовые потенциалы и конформные преобразования.* В сборнике статей к 65-летию проф. А. А. Гриба "Гравитация, космология и элементарные частицы" под ред. В.Ю. Дорофеева, Ю.В. Павлова, Е.А. Поберия, СПб, изд. СПбГУ-ЭиФ, 2004, С. 51.
- [8] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme. *Phys. Rep.* **251**, 267 (1995); hep-th/9405029.
- [9] И. Б. Андрианов, Р. Г. Баранцев, Л. И. Маневич. *Асимптотическая математика и синергетика.* М.: УРСС, 2004.

# Ранняя Вселенная: рождение частиц и квантовая космология

М. Л. Фильченков<sup>a,b\*</sup>,  
Ю. П. Лаптев<sup>a,c†</sup>,  
Р. Х. Сайбаталов<sup>b‡</sup>

<sup>a</sup> *Российский университет дружбы народов, Институт гравитации  
и космологии, Москва*

<sup>b</sup> *Фридмановская лаборатория теоретической физики,  
Санкт-Петербург*

<sup>c</sup> *Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана, Кафедра физики*

Рассмотрено рождение частиц в ранней Вселенной на масштабе Великого объединения с учетом барионной асимметрии. Показано, что комтоновская шкала рождения частиц согласуется с результатами квантовой космологии.

## 1. Введение

Ранней Вселенной называют начальные этапы ее эволюции, которые включают квантовую стадию, первую инфляцию и начало радиационно-доминантной фазы: вплоть до образования легких элементов, т.е. эпохи нуклеосинтеза, которая завершается через три минуты после рождения Вселенной [1]. Описание ранней Вселенной требует привлечения не только космологии, но и физики элементарных частиц. На стыке этих направлений родилась новая наука – космомикрoфизика, изучающая раннюю Вселенную на основе анализа связи между макро- и микромиром. Ниже мы рассмотрим два вопроса: рождение частиц в начале радиационно-доминантной фазы и квантовую космологию.

---

\*E-mail: fmichael@mail.ru

†E-mail: yplaptev@rambler.ru

‡E-mail: roustams@list.ru

## 2. Рождение частиц

Рождение частиц в космологии начало рассматриваться с 70-х годов прошлого века главным образом ленинградскими физиками А. А. Грибом, С. Г. Мамаевым и В. М. Мостепаненко [2]. Основная идея метода состоит в том, что частицы с массой  $m$  наиболее эффективно рождаются в эпоху, соответствующую комптоновскому времени

$$t_c = \frac{\hbar}{mc^2}, \quad (1)$$

что следует из соотношения неопределенности  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$  при  $\Delta E = mc^2$  и  $\Delta t \sim t_c$ .

Температурная шкала времени дается формулой

$$t_T = \frac{\hbar m_{pl} c^2}{(kT)^2} \sqrt{\frac{45}{32\pi^3 g_{eff}}}, \quad (2)$$

где

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

– планковская масса,  $g_{eff} = 10^2 \div 10^4$  – число степеней свободы ультрарелятивистских частиц (фотон имеет две поляризации). В радиационно-доминантной фазе  $kT \gg mc^2$ , поэтому

$$t_T \ll \frac{\hbar m_{pl}}{mc^2 \sqrt{g_{eff}}}.$$

Из формул (1) – (2) получаем, что  $kT \gg mc^2$  при  $m\sqrt{g_{eff}} \ll m_{pl}$ . Легко видеть, что последнее неравенство всегда выполняется. Следует отметить, что иногда этапы эволюции ранней Вселенной делят на эпохи, соответствующие температурам  $T \sim mc^2$  в формуле (2). Например, эпоха при  $T \sim m_p c^2$  называется адронной эрой, а эпоха при  $T \sim m_e c^2$  лептонной эрой. Однако эти эпохи не соответствуют комптоновской шкале рождения частиц.

Виртуальные пары вакуума частица-античастица превращаются в реальные пары за счет приливных сил в пространстве времени, радиус кривизны которого  $K \sim 1/\lambda_c^2$ , где  $\lambda_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны.

Число частиц со спином  $s$ , рожденных в начале радиационно-доминантной фазы, дается формулой

$$N = b^{(s)} \left( \frac{m}{\hbar} \right)^{3/2} a_0^3, \quad (3)$$

где  $b^{(0)} = 5 \cdot 10^{-4}$  для скалярных, а  $b^{(1/2)} = 4 \cdot 10^{-3}$  для спинорных частиц,  $a_0$  – коэффициент в зависимости  $a = a_0 \sqrt{t}$  масштабного фактора от времени. Расчеты, проведенные А. А. Грибом и Ю. В. Павловым в последнее десятилетие [3], показали, что формула (3) дает число порядка  $10^{80}$ , т.е. близкое к числу Эддингтона

$$N_{Edd} = \frac{\rho_{cr} R_U^3}{m_p}, \quad (4)$$

где  $R_U = c/H$  – наблюдаемый радиус Вселенной,  $H$  постоянная Хаббла, если допустить, что сразу после первой инфляции рождаются частицы с энергией покоя  $mc^2 = 10^{14} \div 10^{16}$  ГэВ, т.н. лептокварки, предсказанные теорией Великого объединения (ТВО). Лептокварки распадаются на кварки и лептоны. В силу несохранения барионного заряда число кварков не равно числу антикварков. Спустя три минуты завершается бариогенез, т.е. три кварка объединяются, образуя нуклоны, имеющие кварковую структуру  $uud$  для протона и  $udd$  для нейтрона. При этом число барионов не равняется числу антибарионов, т.е. возникает барионная асимметрия, величина которой определяется отношением числа барионов, оставшихся после аннигиляции с антибарионами, к числу фотонов, образовавшихся результате аннигиляции. Это отношение порядка  $10^{-9} g_{eff}$ . Необходимыми условиями генерации барионной симметрии является отсутствие термодинамического равновесия, несохранение зарядовой симметрии, несохранение четности и несохранения барионного заряда. Все эти условия выполняются в эпоху Великого объединения.

### 3. Квантовая космология

Из факта расширения Вселенной следует, что в прошлом она имела очень малый размер и должна рассматриваться в рамках квантовой модели. В 1973 г. физики Э. П. Трайен (США) и П. И. Фомин (СССР) независимо друг от друга выдвинули предположение о том, что Вселенная возникла из вакуума в результате квантовой флуктуации. Так родилось новое научное направление – квантовая космология. В 1982 г.

А. Виленкин (США) предложил интерпретировать спонтанное квантовое рождение Вселенной из деситтеровского вакуума как туннельный эффект, подобный альфа-распаду атомного ядра.

Квантовая космология базируется на подходе, получившем название квантовой геометродинамики (КГД) и развитом в 60-х годах прошлого века американскими физиками Джоном Уилером (1911 – 2008) и Брайсом ДеВиттом (1923 – 2004) [4]. Квантовая геометродинамика представляет собой квантование геометрии в целом. Основное уравнение КГД

$$\hat{H}\psi = 0, \quad (5)$$

где  $\hat{H}$  – оператор Гамильтона и  $\psi$  – волновая функция для трехмерной геометрии, позволившее объединить общую теорию относительности и квантовую теорию, Уилер предложил называть уравнением Эйнштейна-Шредингера. Затем его называли уравнением ДеВитта, а с 1988 г. за ним окончательно утвердилось название уравнение Уилера-ДеВитта (УДВ).

Это уравнение может быть получено из уравнения Шредингера, если считать волновую функцию, определенной в суперпространстве 3-геометрий, т.е. независимой от времени. В квантовой космологии уравнение УДВ может быть приведено к уравнению типа стационарного уравнения Шредингера в эффективном плоском пространстве, используя первое уравнение Фридмана

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\epsilon a^2}{3c^2} = -\frac{kc^2}{2}, \quad (6)$$

где  $k = 0, \pm 1$  – параметр модели.

В последнем уравнении переопределим время согласно соотношению  $cdt = ad\eta$ , где  $\eta$  – конформное время, а импульс  $P = da/d\eta$  заменим на оператор импульса

$$\hat{P} = \frac{l_{pl}^2}{i} \frac{d}{da}.$$

Тогда (5) примет вид

$$\frac{d^2\psi}{da^2} - \frac{2m_{pl}}{\hbar^2}[U(a) - E]\psi = 0, \quad (7)$$

где волновая функция определена в минисуперпространстве масштабных факторов.



Рассмотрим многокомпонентную среду с плотностью энергии

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad (8)$$

где  $n = 3(1+w)$ . Т.к.  $\varepsilon = \varepsilon_0$  при  $a = r_0$ , то получаем условие нормировки

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n = 1, \quad (9)$$

где  $B_n$  – вклад  $n$ -компоненты среды в полную плотность энергии на горизонте де Ситтера. Среда имеет следующие компоненты:

- 1) фантомная материя при  $n < 0$ ,  $w < -1$ ,
- 2) деситтеровский вакуум при  $n = 0$ ,  $w = -1$ ,
- 3) доменные стенки при  $n = 1$ ,  $w = -\frac{2}{3}$ ,
- 4) струны при  $n = 2$ ,  $w = -\frac{1}{3}$ ,
- 5) пыль при  $n = 3$ ,  $w = 0$ ,
- 6) излучение при  $n = 4$ ,  $w = \frac{1}{3}$ ,
- 7) идеальный газ при  $n = 5$ ,  $w = \frac{2}{3}$ ,
- 8) предельно жесткая материя при  $n = 6$ ,  $w = 1$ ,
- 9) экпиротическая материя при  $n > 6$ ,  $w > 1$ .

Рассмотрим среду, состоящую из деситтеровского вакуума, струн и излучения, для которой условие нормировки (9) принимает вид  $B_0 + B_2 + B_4 = 1$ . В уравнении УДВ (7) потенциальная энергия

$$U(a) = \frac{m_{pl}c^2}{2l_{pl}^2} \left[ (k - B_2)a^2 - \frac{B_0a^4}{r_0^2} \right], \quad (10)$$

а полная энергия

$$E = \frac{m_{pl}c^2}{2} \left(\frac{r_0}{l_{pl}}\right)^2 B_4, \quad (11)$$

где

$$l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

– планковская длина. Потенциальная энергия  $U(a) = 0$  при  $a = a_1 = 0$ ,

$$a = a_2 = r_0 \sqrt{\frac{k - B_2}{B_0}},$$

её минимум  $U_{min} = 0$  при  $a = a_{min} = 0$  и максимум

$$U_{max} = \frac{m_{pl}c^2}{2} \left( \frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2 \frac{(k - B_2)^2}{B_0}$$

при

$$a = a_{max} = r_0 \sqrt{\frac{k - B_2}{2B_0}}.$$

Отсюда следует, что  $k - B_2 > 0$ , т.к.  $B_0 > 0$ . Уравнение (7) описывает Вселенную, которая ведет себя как планкеон ( $m = m_{pl}$ ) с энергией излучения  $E$ , в поле вакуума и струн.

В квантовой космологии рассматриваются две задачи:

1) определение энергетического спектра Вселенной в додеситтеровской стадии,

2) нахождение вероятности рождения Вселенной из деситтеровского вакуума (туннелирования через потенциальный барьер).

Вблизи минимума потенциальной энергии Вселенная имеет осцилляторный энергетический спектр

$$E = m_{pl}c^2 \sqrt{k - B_2} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

В силу того, что  $E < U_{max}$

$$n + \frac{1}{2} < \frac{(k - B_2)^{3/2}}{8B_0} \left( \frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2 \quad (13)$$

и

$$B_4 < \frac{(k - B_2)^2}{4B_0}. \quad (14)$$

Вероятность туннелирования Вселенной через потенциальный барьер вычисляется по формуле Гамова

$$D = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \left| \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{2m_{pl}[E - U(a)]} da \right| \right\}, \quad (15)$$

где  $U(a_1) = U(a_2) = E$ . Подставляя (10), (12) в (15) и вычисляя интеграл, получаем

$$D \approx D_{E=0} \exp \left\{ \pi \sqrt{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (16)$$

где вероятность туннелирования при  $E = 0$  дается формулой

$$D_{E=0} \approx \exp \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2 \frac{(k - B_2)^{3/2}}{B_0} \right\}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что величина  $D_{E=0}$  максимальна при  $k - B_2 \ll 1$ . Исходя из величины флуктуаций реликтового излучения

$$\frac{\Delta T}{T} \leq 10^{-5}$$

можно получить [5], что величина

$$\sqrt{k - B_2} = \frac{2\Delta T}{T\alpha_{GUT}} \leq 10^{-3},$$

где  $\alpha_{GUT}$  - эффективная постоянная ТВО. Таким образом, параметр модели  $k = 0, \pm 1$  определяется вкладом струн в полную плотность энергии  $B_2$ . Условие нормировки принимает вид  $B_0 + B_2 \approx 1$ . Ширина потенциального барьера принимает вид

$$a_2 \approx r_0 \sqrt{\frac{k - B_2}{1 - B_2}}.$$

Отсюда  $a_2 \approx r_0$  при  $k = 1$  (только для этого случая  $r_0$  определяет масштаб первой инфляции),

$$a_2 \approx r_0 \sqrt{k - B_2}$$

при  $k = 0$  и

$$a_2 \approx r_0 \sqrt{\frac{k - B_2}{2}}$$

при  $k = -1$ . Рождение частиц невозможно под барьером, т.е. в классически запрещенной области [6]. Поэтому должно выполняться условие

$$t_c > \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{k - B_2}{B_0}}, \quad (18)$$

где масштаб Великого объединения

$$r_0 = \left( \frac{m_{pl} c^2}{E_{GUT}} \right)^2 l_{pl}. \quad (19)$$

Из (1) и (18) получаем ограничение на массу рождающихся частиц

$$m > m_{pl} \sqrt{\frac{k - B_2}{B_0}}. \quad (20)$$

Таким образом, параметр  $\sqrt{k - B_2}$ , возникающий в квантовой космологии, оказывается связанным и с рождением частиц в ранней Вселенной. При  $k = 1$  формула (17) принимает вид

$$D_{E=0} \approx \exp \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{r_0}{l_{pl}} \right)^2 \sqrt{1 - B_2} \right\}. \quad (21)$$

Сравнивая формулы (17) и (21), легко видеть, что рождение закрытой Вселенной намного менее вероятно, чем рождение открытой или плоской. Вклады струн и деситтеровского вакуума в зависимости от параметра модели даются ниже:

$k = 0$	$ B_2  \ll 1$	$B_0 \approx 1$	Инфляционная модель
$k = 1$	$B_2 \approx 1$	$B_0 \ll 1$	Струнноподобная модель
$k = -1$	$B_1 \approx -1$	$B_0 \approx 2$	Смешанная модель

Это согласуется с тем, что наблюдения свидетельствуют в пользу плоской модели ранней Вселенной с инфляционной стадией.

## 4. Заключение

К счастью, теория ранней Вселенной носит не только спекулятивный характер. В рамках изотропных и однородных космологических моделей оказывается возможным получить число Эддингтона, характеризующее количество материи в наблюдаемой Вселенной, согласующееся с данными по анизотропии реликтового излучения и барионной асимметрии вещества. Дальнейшее развитие теории требует рассмотрения анизотропных космологических моделей. Теоретические результаты могут быть использованы для интерпретации поляризации реликтового излучения, а также анизотропии распределения угловых моментов внегалактических объектов.

## Список литературы

- [1] С. Вайнберг. *Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной*. Пер. с англ. М.: Энергоиздат, 1981.
- [2] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*. М.: Атомиздат, 1980.
- [3] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov. *Mod. Phys. Lett.* **A23**, 1151 (2008).
- [4] Дж. А. Уилер. *Предвидение Эйнштейна*. Пер. с нем. М.: Мир, 1970.
- [5] I. Dymnikova, M. Fil'chenkov. *Phys. Lett.* **B545**, 214 (2002).
- [6] J. Hong, A. Vilenkin et al. *Phys. Rev.* **D68**, 023520 (2003).

# Об объединении гравитации и электромагнетизма в рамках обще-релятивистского подхода

Александр А. Черницкий\*†

*Фридмановская лаборатория теоретической физики*

Рассматривается проблема объединения гравитационного и электромагнитного взаимодействий и возможность её решения, основанная на существовании эффективного Риманова пространства в нелинейной электродинамике.

## 1. Введение

Проблема объединения всех взаимодействий в единой теории остаётся одной из важнейших проблем теоретической физики. Такое объединение в рамках теории некоторого единого поля представляется заслуживающим серьёзного внимания.

Среди взаимодействий, о которых мы сейчас можем вести речь, естественно выделяются два дальних взаимодействия: гравитация и электромагнетизм. Очевидно, что в рамках теории единого поля эти два взаимодействия должны появляться естественным образом.

То обстоятельство, что гравитационное взаимодействие связано с изменением симметричного метрического тензора пространства-времени, является в настоящее время общепринятым фактом. Однако, здесь надо заметить, что для согласия с экспериментальными данными достаточно считать, что для движения материальных объектов существует эффективное Риманово пространство, которое в свою очередь может быть индуцировано некоторым полем, отличным от поля метрического тензора.

Такое индуцированное Риманово пространство появляется в нелинейной электродинамике, когда рассматривается дальнейшее взаимодействие частиц, представляющих собой солитоны модели [1, 2].

---

\*E-mail: AAChernitskii@mail.ru, AAChernitskii@engec.ru

†Адрес: *Государственный Инженерно-Экономический Университет, Санкт-Петербург, 191002, ул. Марата 27*

В соответствии с различными точками зрения электродинамику вакуума следует считать нелинейной. Это значит, что указанное эффективное Риманово пространство должно быть по крайней мере учтено в расчётах, связанных с гравитационным взаимодействием. Радикальная же точка зрения здесь будет состоять в том, что вся гравитация есть проявление нелинейности электромагнитного поля.

## 2. Обще-инвариантная нелинейная полевая модель

Рассмотрим поле некоторого тензора второго ранга  $G_{\mu\nu}$  в четырёхмерном пространстве-времени и следующий вариационный принцип:

$$\delta \int \sqrt{|\det(G_{\mu\nu})|} (dx)^4 = 0 , \quad (1)$$

где  $(dx)^4 \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ , греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3.

В силу правил замены переменной в интеграле и преобразования детерминанта тензора второго ранга, этот вариационный принцип является инвариантным относительно общих преобразований координат.

Тензор  $G_{\mu\nu}$  может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, первый из которых можно отождествить с метрическим тензором, а второй с тензором электромагнитного поля:

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \chi^2 F_{\mu\nu} , \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} , \quad (2)$$

$A_\mu$  – компоненты электромагнитного потенциала.

Вариационный принцип вида (1) рассматривался А. С. Эддингтоном [3] и А. Эйнштейном [4] именно из-за его обще-инвариантности.

М. Борн и Л. Инфельд [5] рассматривали вариационный принцип с тензором  $G_{\mu\nu}$  вида (2), где  $g_{\mu\nu}$  – метрический тензор плоского пространства.

### 3. Уравнения нелинейной электродинамики и эффективное Риманово пространство

Система уравнений Борна-Инфельда имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|g|} f^{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

где

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\chi^{-2} \partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( F^{\mu\nu} - \frac{\chi^2}{2} \mathcal{J} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \mathcal{F}_{\sigma\rho} \right), \quad (4)$$

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{|1 - \chi^2 \mathcal{I} - \chi^4 \mathcal{J}^2|}, \quad \mathcal{I} \equiv F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} / 2,$$

$$\mathcal{J} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} / 8, \quad \varepsilon_{0123} \equiv \sqrt{|g|}, \quad \varepsilon^{0123} = -1/\sqrt{|g|}.$$

Модель Борна-Инфельда имеет следующий симметричный тензор энергии импульса:

$$T_{\nu}^{\mu} \equiv (f^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \chi^{-2} (\mathcal{L} - 1) \delta_{\nu}^{\mu}) / 4\pi. \quad (5)$$

Примечательным является уравнение характеристик в электродинамике Борна-Инфельда [6]:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = 0, \quad (6)$$

где  $\Phi(x^\mu) = 0$  – уравнение характеристической поверхности,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - 4\pi \chi^2 T^{\mu\nu}. \quad (7)$$

Здесь  $T^{\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса вида (5).

### 4. Об объединении гравитации и электромагнетизма

В соответствии с видом уравнения (6), симметричный тензор  $\tilde{g}^{\mu\nu}$  может быть назван метрикой эффективного Риманова пространства. Действительно, при исследовании многочастичного решения модели методом возмущений оказывается, что быстроосциллирующий солитон-частица распространяется по геодезическим линиям эффективного Риманова пространства с метрикой  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , индуцированной удалёнными частицами [2]. Лучи высокочастотных электромагнитных волн искривляются так, как в гравитационном поле с этой метрикой  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ .



Эти результаты означают, что в нелинейной электродинамике имеется взаимодействие, которое неотличимо от гравитационного.

Поскольку компоненты тензора энергии-импульса зависят от чётных степеней компонент электромагнитного поля, это взаимодействие появляется во втором порядке по слабому полю удалённых солитонов.

Электромагнитное же взаимодействие между частицами-солитонами в такой модели естественно появляется в первом порядке по слабому полю удалённых солитонов [2].

Таким образом в рассматриваемой нелинейной электродинамической модели имеются два дальних взаимодействия, появляющиеся в первом и втором порядках по слабому полю удалённых солитонов, которые могут быть отождествлены с электромагнитным и гравитационным. Это и представляет собой объединение двух известных дальних взаимодействий.

Как уже указывалось такая точка зрения является радикальной в данном подходе.

Более умеренная точка зрения состоит в том, что эффективная метрика даёт только часть гравитационного взаимодействия.

Придерживаясь этой точки зрения необходимо обратиться к общепринятому принципу (1) в контексте статьи А. Эйнштейна [4]. В этой статье используется тензор второго ранга  $R_{\mu\nu}$ , построенный из связностей  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ , которые являются полевыми функциями теории. Тензор  $R_{\mu\nu}$  не является симметричным. Далее тензор  $R_{\mu\nu}$  разбивается на симметричную и антисимметричную части. Симметричная отождествляется с метрикой, а антисимметричная – с электромагнитным тензором. Варьирование по  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  даёт уравнения гравитационного поля и уравнения Максвелла в случае слабых полей.

Очевидно, что электродинамические уравнения в этой теории нелинейны для полей не являющихся слабыми. Также очевидно, что нелинейное электромагнитное поле будет порождать эффективную метрику, которая будет вносить вклад в гравитационное взаимодействие.

## 5. О соответствии с экспериментальными данными

Эффективная метрика  $\tilde{g}^{\mu\nu}$  может давать гравитационный потенциал ведущий себя как  $(1/r)$  на бесконечности [7]. Это возможно в случае учёта быстро-осциллирующего электромагнитного фона и усреднения

по быстрым осцилляциям [8]. Гравитационная постоянная в этом случае зависит от амплитуды радиационного фона.

Здесь необходимо коснуться также гравитационных волн, поиски которых ведутся интенсивно. Косвенным доказательством их существования считается наблюдение потери энергии двойной гравитационно связанной системой.

Однако, в рамках рассматриваемой единой теории, потеря энергии такой системой ещё не означает переход её в гравитационные волны. При любой точке зрения (радикальной или умеренной, в изложенном выше смысле) потерянная энергия такой системы может переходить в электромагнитный фон (полностью или частично).

Как известно, прямое наблюдение гравитационных волн пока не произведено. Отсутствие их непосредственной регистрации может быть аргументом в пользу той точки зрения, что вся гравитация обусловлена нелинейным электромагнитным полем.

## 6. Заключение

Рассмотренный подход к важной проблеме объединения взаимодействий представляется разумным и требует дальнейшей разработки. Сравнение новых теоретических результатов с получаемыми экспериментальными данными позволит сделать вывод о применимости теории.

## Список литературы

- [1] A. A. Chernitskii, *Theor. Math. Phys.* **90**, 260 (1992).
- [2] A. A. Chernitskii, *J. High Energy Phys.* **12**, Paper 10 (1999), hep-th/9911093.
- [3] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge, 1924).
- [4] A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie, in *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math.* (Kluwer Academic Publishers, 1923).
- [5] M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A* **144**, 425 (1934).
- [6] A. A. Chernitskii, *J. High Energy Phys.* **11**, Paper 15 (1998), hep-th/9809175.

- [7] A. A. Chernitskii, *Gravitation & Cosmology* **8**, Supplement, 157 (2002), gr-qc/0211034.
- [8] A. A. Chernitskii, *Hadronic Journal* 29, 497-528 (2006), hep-th/0602079.
- [9] A. A. Chernitskii, *Gravitation & Cosmology* **12**, 130 (2006), hep-th/0609204.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редакторов .....	3
Интервью с профессором А.А. Грибом в связи с его 70-летием ..	4
Монографии и учебники А. А. Гриба .....	11
К. А. Bronnikov, V. N. Melnikov. <i>Nonsingular cosmologies with a Null Big Bang</i> .....	12
Д. В. Гальцов, Е. А. Давыдов. <i>Космологическая модель с полями Янга-Миллса-Хиггса</i> .....	25
Ю. Н. Гнедин, М. Ю. Пиотрович. <i>СПЕКТР-УФ: Новые перспективные задачи в области космологии и физики звезд</i> .....	45
Е. В. Дамаскинский, В. В. Борзов. <i>Осциллятор Фибоначчи</i> .....	54
В. Ю. Дорофеев. <i>Разложение уравнений Эйнштейна по фоновому гравитационному полю</i> .....	66
В. К. Дубрович. <i>Нелинейные квантовые особенности рекомбинации первичного водорода</i> .....	75
Р. Р. Запатрин, Г. Н. Парфёнов. <i>Верность принципу Лапласа</i> ..	82
Протоиерей Кирилл Копейкин. <i>Theologia naturalis на рубеже III тысячелетия</i> .....	89
С. В. Красников. <i>Сверхсветовые перемещения</i> .....	103
В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева, В. Н. Строков. <i>История образования структуры во Вселенной</i> .....	117
К. С. Мамаева, Н. Н. Трунов. <i>От квазиклассики к периодической системе: опыт осмысления</i> .....	133
V. M. Mostepanenko. <i>New results in the theory of the Casimir force</i>	143
Ю. В. Павлов. <i>Рождение частиц в космологии: Точные решения</i>	158

Е. А. Поберий. <i>Модель векторной квинтэссенции и проблема совпадения</i> .....	172
Е. V. Prokhorov. <i>Light Front QCD Hamiltonian with Nontrivial Vacuum</i> .....	179
В. С. Старостин. <i>Когерентность поля, возникающего при одноквантовой аннигиляции монохроматического пучка позитронов в поле плоской электромагнитной волны</i> .....	190
Н. Н. Трунов. <i>Оптимизированное условие квазиклассического квантования</i> .....	195
М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, Р. Х. Сайбаталов. <i>Ранняя Вселенная: рождение частиц и квантовая космология</i> .....	205
А. А. Черницкий. <i>Об объединении гравитации и электромагнетизма в рамках общерелятивистского подхода</i> .....	214

Научное издание

Квантовая теория и космология  
Сборник статей, посвященный 70-летию  
профессора А.А. Гриба

Под редакцией  
В.Ю. Дорофеева и Ю.В. Павлова

Подписано в печать 10.03.09 Формат 60X84 1/16.  
Бумага офсетная. Печ. л. 12.625

Отпечатано в типографии ООО «Ютас»  
196105, СПб, ул. Рощинская, д. 36  
e-mail: 388-03-21@mail.ru